Θεωρία Αναπαραστάσεων

Σύντομη Θεωρία και Λυμένες Ασκήσεις

Κωνσταντίνος Μπιζάνος

Αθήνα,
22 Σεπτεμβρίου 2024

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΥΝΟΨΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Σημειώνουμε ότι κάθε φορά που θα λέμε ομάδα θα εννοούμε πεπερασμένη ομάδα, και κάθε φορά που θα λέμε σώμα θα εννοούμε αλγεβρικά κλειστό σώμα.

1.1 Αναπαραστάσεις Πεπερασμένων Ομάδων

Ερώτηση

Έστω G ομάδα και k σώμα. Τί ονομάζουμε αναπαράσταση της G πάνω από το k ;

Μια αναπαράσταση της G στο k είναι ένα ομομορφισμός ομάδων

$$\rho \colon G \to \mathrm{GL}_n(k)$$

Ερώτηση

Υπάρχουν κάποιες χρήσιμες ιδιότητες που πρέπει να θυμάμαι ;

Φυσικά ! Ισχύει ότι

- $\rho(1) = I_n$
- $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$
- $\rho\left(g^m\right) \rho(g)^m$

Παράδειγμα

Για κάθε G ομάδα και k σώμα υπάρχει η **τετριμένη αναπαράσταση** η οποία δίνεται από

$$\rho_{\mathrm{tr}} \colon G \to \mathrm{GL}_1(k) = k^*, \quad \rho_{\mathrm{tr}}(g) = 1$$

Αναπαράσταση Πρόσημο

Έστω $G = S_n$. Τότε ορίζεται αναπαράσταση

$$\rho_{\text{sign}} \colon S_n \to \mathrm{GL}_1(k) = k^*, \quad \rho_{\text{sign}}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma)$$

Ερώτηση

Πότε μια αναπαράσταση ρ λέγεται πιστή ;

Η ρ λέγεται **πιστή** αν είναι 1-1, δηλαδή $\ker \rho = \{1\}$.

1.2 Ο ομαδοδακτύλιος kG

Θα ορίσουμε ένα νέο δακτύλιο kG (k - άλγεβρα) και θα δούμε ότι τα πρότυπα πάνω από αυτόν τον δακτύλιο επί της ουσίας ταυτίζονται με τις αναπαραστάσεις της G στο k

Ερώτηση

Τί ορίζουμε ως άλγεβρα kG ;

Έστω G ομάδα και k σώμα. Ορίζουμε ως kG τον k - διανυσματικό χώρο

$$kG = \bigoplus_{g \in G} kg$$

δηλαδή το ελεύθερο αβελιανό k - πρότυπο με βάση το G. Ουσιαστικά κάθε $x \in kG$ γράφεται μοναδικά στην μορφή

$$x = \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n$$

όπου $\lambda_i \in k$ και $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$.

Ερώτηση

Πως μπορούμε να ορίσουμε πράξεις στον kG ώστε να αποκτήσει πράγματι δομή k - άλγεβρας ;

- **Πρόσθεση** :

$$\sum_{g\in G}\lambda_g g + \sum_{g\in G}\mu_g g = \sum_{g\in G}(\lambda_g + \mu_g) g$$

- **Εξωτερικός Πολλαπλασιασμός**

$$\lambda \cdot \left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right) = \sum_{g\in G}\lambda\lambda_g g, \quad \lambda \in k$$

- **Πολλαπλασιασμός**

$$\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right)\cdot\left(\sum_{h\in G}\lambda_h h\right) = \sum_{g,h\in G}\lambda_g\mu_h gh$$

ουσιαστικά ο πολλαπλασιασμός γίνεται παρόμοια με τον νόμο της επιμεριστικής ιδιότητας (αλλά θέλει προσοχή !).

Ερώτηση

Είναι σωστό ότι κάθε $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_n(k)$ επάγει ένα kG πρότυπο ; Και αν ναι πως ;

Ουσιαστικά κάθε πίνακας $A \in \mathrm{GL}_n(k)$ είναι ένας k - γραμμικός αυτομορφισμός

$$\varphi\colon k^n \to k^n \quad v \mapsto A\cdot v$$

Έστω $V = k^n$. Ορίζεται δράση της G στο V ως εξής

$$g\cdot v = \rho(g)(v) \in V$$

Άρα, για ένα τυχαίο $\sum_{g\in G}\lambda_g g \in kG$ έχουμε ότι

$$\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right)\cdot v = \sum_{g\in G}\lambda_g\rho(g)(v)$$

ουσιαστικά επεκτείνοντας της δράση της G σε όλο τον δακτύλιο kG. Αφήνεται ως άσκηση να δειχθεί ότι το V είναι πράγματι ένα kG - πρότυπο.

Ερώτηση

Το αντίστροφο είναι σωστό ; Δηλάδη ισχύει ότι για κάθε V ένα kG πρότυπο (το οποίο είναι και k - δ.χ.) με $\dim_k V = n < \infty$, επάγει αναπαράσταση $\rho_V\colon G \to \mathrm{GL}_n(k)$; Και αν ναι με ποιο τρόπο ;

Έστω V ένα kG - πρότυπο και έστω $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ μια βάση του V. Αν $g \in G$, παρατηρήστε ότι ορίζεται k - γραμμική απεικόνιση

$$\varphi_g \colon V \to V, \quad v \mapsto g \cdot v$$

η οποία είναι αυτομορφισμός, αφού $\varphi_{g^{-1}} = \varphi_g^{-1}$. Συνεπώς, αν $[g]_{\mathscr{B}}$ ο πίνακας της φ_g ως προς την βάση $\mathscr{G}$ παρατηρούμε ότι ορίζεται

$$\rho \colon G \to \mathrm{GL}_n(k), \quad \rho(g) = [g]_{\mathscr{B}}$$

Αρκετές φορές θα συμβολίζουμε με (V, ρ_V), εννοώντας ότι η ρ_V είναι η επαγόμενη αναπαράσταση.

Το κανονικό kG - πρότυπο

Θεωρούμε δράση της G στο kG με το εξής τρόπο

$$g \cdot \left(\sum_{h \in G} \lambda_h h\right) = \sum_{h \in G} \lambda_h g h = \sum_{h \in H} \lambda_{g^{-1}h} h$$

Επεκτείνοντας γραμμικά το kG αποκτά δομή kG προτύπου. Το kG με την παραπάνω δράση του kG λέγεται το **κανονική** kG **- πρότυπο** . Η επαγόμενη αναπαράσταση λέγεται **κανονική αναπαράσταση** της G.

Πρότυπο Μετάθεσης

Θεωρούμε $G = S_n$ και V ένα k - δ.χ. διάστασης n και $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Ορίζεται δράση της G στο $\mathscr{B}$ ως εξής :

$$\sigma \cdot v_i := v_{\sigma(i)}$$

και επεκτείνεται σε όλο το V.

Παράδειγμα

Έστω $G = S_3$ και V ένα k - δ.χ. διάστασης 3 και $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Τότε, αν $\sigma = (12) \in S_3$ παρατηρούμε ότι

$$\sigma \cdot v_1 = v_2 \quad \sigma \cdot v_2 = v_1 \quad \sigma \cdot v_3 = v_3$$

Στην αντίστοιχη επαγόμενη αναπαράσταση προκύπτει ότι

$$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ερώτηση

Έστω V ένα kG - πρότυπο. Πότε λέγεται ανάγωνο ;

Το V λέγεται **ανάγωγο** kG - πρότυπο αν δεν υπάρχει $W \neq 0$ μη μηδενικός υπόχωρος τέτοιος ώστε να είναι αναλλοίωτος κάτω από την δράση της G (δηλαδή $gW \subseteq W$, για κάθε $g \in G$). Ισοδύναμα δεν έχει μη τετριμένο, γνήσιο kG - υποπρότυπο.

Ερώτηση

Έστω V, W δύο kG - πρότυπα και $\varphi\colon V \to W$ μια k - γραμμική απεικόνιση. Πότε η φ λέγεται kG - γραμμική ;

Η φ λέγεται kG **- γραμμική** αν για κάθε $g \in G$ και $v \in V$ ισχύει

$$\varphi(g \cdot v) = g \cdot \varphi(v)$$

Ουσιαστικά η φ είναι ομομορφισμός kG - προτύπων με τον συνήθη τρόπο από την θεωρία προτύπων.

Ερώτηση

Έστω V, W δύο kG - πρότυπα και $\varphi\colon V \to W$ μια kG - γραμμική απεικόνιση. Γνωρίζουμε κάποια βασικά υποπρότυπα των V, W που επάγονται από την φ ;

Ναι ! Ισχύει ότι $\ker\varphi \leq V$ και $\mathrm{Im}\varphi \leq W$ είναι kG - υποπρότυπα των V και W αντίστοιχα. Επίσης ισχύει ότι

$$V = \ker\varphi \oplus U$$

όπου $U \leq V$ ένα kG - υποπρότυπο όπου $U \cong \mathrm{Im}\varphi$ (ισόμορφα kG - πρότυπα).

Ερώτηση

Έστω (V, ρ) ένα kG - πρότυπο και $(U_1, \rho_1), (U_2, \rho_2)$ δύο kG - υποπρότυπα τέτοια ώστε $V = U_1 \oplus U_2$. Τί μπορούμε να πούμε για την αντίστοιχη αναπαράσταση ;

Έστω $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ βάσεις για τα U_1, U_2 αντίστοιχα. Τότε, ισχύει ότι $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ είναι μια βάση του V. Τότε, για κάθε $g \in G$ παρατηρήστε ότι

$$\rho(g) = [g]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} [g]_{\mathscr{B}_1} & 0 \\ 0 & [g]_{\mathscr{B}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$$

Αρκετές φορές συμβολίζουμε και ως

$$\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$$

ευθύ άθροισμα αναπαραστάσεων.

1.3 Θεώρημα Maschke και Λήμμα του Schur

Ερώτηση

Τί λέει το θεώρημα του Maschke ;

Έστω V ένα kG - πρότυπο και $U \leq V$ ένα kG - υποπρότυπό του. Τότε, υπάρχει $W \leq V$ ένα kG - υποπρότυπό του τέτοιο ώστε

$$V = U \oplus W$$

Ερώτηση

Μπορεί ένα kG - πρότυπο V να αναλυθεί σε ευθύ άθροισμα αναγώγων ;

Φυσικά ! Από το Θεώρημα του Maschke προκύπτει ότι κάθε αναλύεται σε ευθύ άθροισμα αναγώγων

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$$

Ομαδόποιώντας τους ανά δύο ισόμορφους παράγοντες τότε έχουμε ότι

$$V = U_1^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus U_k^{\lambda_k}$$

Μάλιστα αποδεικνύεται ότι $\lambda_i = \dim_k U_i$, συνεπώς έχουμε ότι

$$V = U_1^{\dim_k U_1} \oplus \cdots \oplus U_k^{\dim_k U_k}$$

Εφαρμογή

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο για το κανονικό kG - πρότυπο και περνόντας σε βαθμούς έχουμε ότι

$$|G| = \dim_k U_1^2 + \cdots + \dim_k U_k^2$$

Ερώτηση

Τί λέει το λήμμα του Schur ;

Αν V, W δύο ανάγωγα kG - πρότυπα και $\varphi \colon V \to W$ ομομορφισμός kG - προτύπων, τότε $\varphi = 0$ ή φ είναι ισομορφισμός. Ένα σημαντικό πόρισμα του συγκεκριμένου λήμματος είναι το εξής. Αν V ανάγωγο kG - πρότυπα και $\varphi \colon V \to V$ ομομορφισμός kG - προτύπων, τότε υπάρχει $\lambda \in k$ τέτοιο ώστε

$$\varphi = \lambda \cdot \mathrm{Id}_V$$

1.4 Αναπαραστάσεις Αβελιανών Ομάδων

Στην θεωρία αναπαραστάσεων οι ανάγωγες αναπαραστάσεις είναι σαν τα τουβλάκια Lego της γενικότερης κατασκεύης (αναπαράστασης) όπως υποδεικνύει το παραπάνω πόρισμα του θεωρήματος του Maschke. Θα προσπαθήσω να εξηγήσουμε τεχνικές όπου αρκετές φορές είναι αρκετά χρήσιμες για την εύρεση των ανάγωγων αναπαραστάσεων μια ομάδας. Από τώρα και στο εξής θα θεωρούμε όπου $k = \mathbb{C}$.

Ερώτημα

Υποθέτουμε ότι G είναι αβελιανή. Ποιες είναι οι ανάγωγες αναπαραστάσεις της G ;

Από το λήμμα του Schur (άσκηση) προκύπτει ότι μια αναπαράσταση (V, ρ) είναι ανάγωγη αν και μόνο αν $\dim_k V = 1$.

Ερώτηση

Έστω G αβελιανή. Πως μπορούμε να βρούμε τις μονοδιάστατες αναπαραστάσεις της ;

Γνωρίζουμε, από γνωστό θεώρημα της θεωρίας ομάδων, ότι

$$G = C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_k}$$

όπου $C_{n_i} = \langle a_i \rangle$ κύκλική τάξης n_i.
Αν βρούμε όλες τις αναπαραστάσεις

$$\rho_i \colon C_{n_i} \to \mathbb{C}^*$$

Τότε, οι ζητούμενες αναπαραστάσεις θα είναι οι

$$\rho \colon G \to C^*, \quad \rho(m_1 a_1 + \cdots + m_k a_k) = \prod_i^k \rho_i(a_i)^{m_i}$$

Ερώτηση

Πως βρίσκω τις ανάγωγες αναπαραστάσης μια κυκλικής ομάδας $C = \langle a \rangle$ τάξης n ;

Έστω $\rho \colon C \to \mathbb{C}^*$ ανάγωγη αναπαράσταση. Αρκεί να καθορίσουμε την τιμή του $\rho(a)$. Έχουμε ότι

$$\rho(a)^n = \rho\left(a^n\right) = \rho(1) = 1$$

Άρα, $\rho(a)$ είναι μια n - οστή δύναμη της μονάδας. Συνεπώς, αν ω μια πρωταρχική n - οστή ρίζα της μονάδας έχουμε ότι όλες οι 1-διάστες αναπαραστάσεις την C είναι οι

$$\rho_i \colon C \to \mathbb{C}^*, \quad \rho_i(a) = \omega^i$$

Παράδειγμα

Θα βρούμε τις 1-διάστατες αναπαραστάσεις της $\mathbb{Z}_2$. Αν $\rho \colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}^*$ μια αναπαράσταση, είδαμε ότι

$$\rho([1]_2) \in \{-1, 1\}$$

Συνεπώς, υπάρχουν δύο ανάγωγες αναπαραστάσεις της $\mathbb{Z}_2$ είναι η

$$\rho_1([1]_2) = 1 \quad \text{και} \quad \rho_2([1]_2) = -1$$

Παράδειγμα

Θα βρούμε τις 1-διάστατες αναπαραστάσεις της $\mathbb{Z}_3$. Αν $\rho\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{C}^*$ μια αναπαράσταση, είδαμε ότι

$$\rho([1]_3) \in \left\{1, \omega, \omega^2\right\}$$

όπου ω μια 3η ρίζα της μονάδας. Συνεπώς, υπάρχουν τρείς ανάγωγες αναπαραστάσεις της $\mathbb{Z}_3$.

Παράδειγμα

Θα βρούμε τις ανάγωγες αναπαραστάσεις της $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$.
Από τα παραπάνω παραδείγματα είδαμε ότι οι ανάγωγες αναπαραστάσεις των $\mathbb{Z}_2$ και $\mathbb{Z}_3$ είναι οι

$$\tau_1([1]_2) = 1,\ \tau_2([1]_2) = -1,\ \rho_1([1]_3) = 1,\ \rho_2([1]_3) = \omega,\ \rho_3([1]_3) = \omega^2$$

Άρα, η G έχει 6 μονοδιάστατες αναπαραστάσεις τις

$$\rho_{i,j}([n]_2 + [m]_3) = \tau_i([n]_2) \cdot \rho_j([m]_3) = (-1)^{i\cdot n} \cdot \omega^{j\cdot m}$$

1.5 Χαρακτήρες

Ερώτηση

Τί είναι ο χαρακτήρας μια αναπαράστασης $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

Ορίζουμε ως χαρακτήρα της ρ την απεικόνιση

$$\chi\colon G \to \mathbb{C}, \quad \chi(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g))$$

Προφανώς, ο χαρακτήρας ενός $\mathbb{C}G$ - προτύπου ορίζεται να είναι ο χαρακτήρας της αντίστοιχης επαγόμενης αναπαράστασης. (Ο χαρακτήρας είναι ανεξάρτητος επιλογής βάσης).

Παράδειγμα

Έστω $G = S_3$ και V ένα $\mathbb{C}$ - δ.χ. διάστασης 3 και $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Τότε, αν $\sigma = (12) \in S_3$ παρατηρούμε ότι

$$\sigma \cdot v_1 = v_2 \quad \sigma \cdot v_2 = v_1 \quad \sigma \cdot v_3 = v_3$$

Στην αντίστοιχη επαγόμενη αναπαράσταση προκύπτει ότι

$$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $\chi(\sigma) = 1$.

Ερώτηση

Ο χαρακτήρας έχει κάποιες αξιοσημείωτες ιδιότητες ;

Έστω $\rho\colon G\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

- Αν (V,ρ) αναπαράσταση, τότε $\chi(1)=\dim_{\mathbb{C}} V$.
- Έστω $g,h\in G$. Τότε έχουμε ότι
$$\rho\left(h^{-1}gh\right)=\rho(h)^{-1}\rho(g)\rho(h)$$
Επειδή όμοιοι πίνακες έχουν τα ίδια ίχνη, τότε
$$\chi\left(h^{-1}gh\right)=\chi(g)$$
Συνεπώς, οι χαρακτήρες παραμένουν σταθεροί στις κλάσεις συζυγίας
$$\mathrm{Cl}(g)=\left\{h^{-1}gh \mid h\in G\right\}$$
- Αν V είναι ένα $\mathbb{C}G$ - πρότυπο και
$$V=U_1\oplus\cdots\oplus U_n$$
μια ανάλυσή του σε $\mathbb{C}G$ - πρότυπα τότε ισχύει ότι
$$\chi_V=\chi_{U_1}+\cdots+\chi_{U_n}$$
- Αν $V\cong U$ ισόμορφα $\mathbb{C}G$ πρότυπα, τότε $\chi_V=\chi_U$.
- Έστω $g\in G$ στοιχείο τάξης m. Τότε, $\chi(g)$ είναι άθροισμα m-οστών ριζών της μονάδας (χρησιμοποιήστε ότι κάθε πίνακας στο $\mathbb{C}$ είναι τριγωνίσιμος).
- $\chi\left(g^{-1}\right)=\overline{\chi(g)}$.

Χαρακτήρας Κανονικού $\mathbb{C}G$ - Προτύπου

Είδαμε ότι $\mathbb{C}G$ είναι ένα $\mathbb{C}G$ - πρότυπο με βάση $\mathscr{B}=G=\{g_1=1,\ldots,g_n\}$. Αν $g\neq 1$ στην G παρατηρούμε ότι $g\cdot g_i\neq g_i$, συνεπώς το αντίστοιχο στοιχείο στην θέση (i,i) του πίνακα $[g]_{\mathscr{B}}$ είναι 0. Άρα, έχουμε ότι $\chi_{\mathrm{reg}}(g)=0$. Άρα, έχουμε ότι

$$\chi_{\mathrm{reg}}(g)=\begin{cases}|G|, & g=1\\ 0, & g\neq 1\end{cases}$$

Χαρακτήρας του Προτύπου Μετάθεσης

Θεωρούμε V ένα $\mathbb{C}$ - δ.χ. με βάση $\{v_1,\ldots,v_n\}$. Είδαμε ότι η S_n ορίζε δράση

$$\sigma\cdot v_i=v_{\sigma(i)}$$

Αν $\sigma\in S_n$, παρατηρούμε ότι στον αντίστοιχο πίνακα $\rho(g)$, στην θέση (i,i), έχει 1 αν $\sigma(i)=1$, ενώ 0 αν $\sigma(i)\neq 0$. Παίρνοντας Tr στον $\rho(g)$ μετράμε τις μονάδες στην διαγώνιο, τότε μονάδες όσα τα i που $\sigma(i)=i$. Συνεπώς, έχουμε ότι

$$\chi_V(\sigma)=|\mathrm{fix}(\sigma)|,\quad \mathrm{fix}(\sigma)=\{i\in\{1,\ldots,n\}\mid\sigma(i)=i\}$$

1.6 Εσωτερικό Γινόμενο και Χαρακτήρες

Ερώτηση

Θεωρούμε τον $\mathbb{C}$ - δ.χ. $\mathscr{F}(G,\mathbb{C})$ τον συναρτήσεων από το G στο $\mathbb{C}$. Μπορούμε να ορίσουμε εσωτερικό γινόμενο στον $\mathscr{F}(G,\mathbb{C})$;

Μπορούμε ναι ! Αν $f,g \in \mathscr{F}(G,\mathbb{C})$, τότε ορίζουμε

$$\langle f,h\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\cdot\overline{h(g)}$$

Ερώτηση

Τί ισχύει στην ειδική περίπτωση όπου f,g είναι χαρακτήρες της G ;

Αν χ,ψ χαρακτήρες της G είδαμε ότι αυτοί παραμένουν σταθεροί στις αντίστοιχες κλάσεις συζυγίας, συνεπώς αν $\{g_1,\dots,g_k\}$ ένα σύνολο αντιπροσώπων των κλάσεων συζυγίας της G, τότε έχουμε ότι

$$\langle \chi,\psi\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{k} |\mathrm{Cl}(g_i)|\chi(g_i)\cdot\overline{\psi(g_i)}$$

Ερώτηση

Πως οι χαρακτήρες συνδέονται με τις ανάγωγες αναπαραστάσεις της G ;

Αν V,W ανάγωγες αναπαραστάσεις της G ισχύει ότι

$$\langle \chi_V,\chi_W\rangle = 0 \quad \langle \chi_V,\chi_V\rangle = 1$$

Ισχύει και το αντίστροφο. Αν για μια αναπαράσταση V ισχύει ότι

$$\langle \chi_V,\chi_V\rangle = 1$$

τότε V είναι ανάγωγο $\mathbb{C}G$ - πρότυπο. Τέλος, ισχύει ότι V,W είναι ισόμορφα $\mathbb{C}G$ - πρότυπα αν και μόνο αν

$$\chi_V = \chi_W$$

Παράδειγμα

Έστω $G = S_3$ και V το σύνηθες πρότυπο μετάθεσης με βάση $\{v_1,v_2,v_3\}$. Έχουμε δει ότι ο υπόχωρος $U = \langle v_1+v_2+v_3\rangle$ είναι ένα $\mathbb{C}S_3$ - υποπρότυπο και θεωρούμε το $W = V/U$ με βάση $\overline{v_1},\overline{v_2}$ και

$$\overline{v_3} = -\overline{v_1} - \overline{v_2}$$

Δείξτε ότι η W είναι ανάγωγη αναπαράσταση. Σημειώνουμε ότι το συγκεριμένο αποτέλεσμα ισχύει για κάθε $n \geq 1$.

Θα δείξουμε ότι $\langle \chi_W, \chi_W \rangle = 1$. Αρχικά

$$\rho_W(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho_W(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho_W(123) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, έχουμε ότι

$$\chi_W(1) = 2 \quad \chi_W(12) = 0 \quad \chi_W(123) = -1$$

Συνεπώς, ισχύει ότι

$$\langle \chi_W, \chi_W \rangle =$$
$$\frac{1}{6}\left(|\mathrm{Cl}(1)| \cdot \chi_W(1) \cdot \chi_W(1) + |\mathrm{Cl}(12)| \cdot \chi_W(12) \cdot \chi_W(12) + |\mathrm{Cl}(123)| \cdot \chi_W(123) \cdot \chi_W(123)\right) = 1$$

Ερώτηση

Πόσες ανάγωγες αναπαραστάσεις έχει μια ομάδα G ;

Αποδεικνύεται με χρήση θεωρίας χαρακτήρων ότι το πλήθος των ανάγωγων αναπαραστάσεων μιας ομάδας ισούται με το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της.

Παράδειγμα

Θα βρούμε τον πίνακας χαρακτήρων της S_3. Η S_3 έχει τρεις κλάσεις συζυγίας, με αντίστοιχους αντιπροσώπους τα $1, (12), (123)$, συνεπώς έχει 3 ανάγωγες αναπαραστάσεις.

S_3	(1)	(12)	(123)
χ_{tr}	1	1	1
χ_{sign}	1	-1	1
χ_W	2	0	-1

όπου W η αναπαράσταση πηλίκο $W = \mathbb{C}^3/U$, όπου $U = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$. Θα υπολογίσουμε διάφορα εσωτερικά γινόμενα για λόγους εξάσκησης.

$$\langle \chi_{\mathrm{tr}}, \chi_W \rangle = \frac{1}{6}\left(\chi_{\mathrm{tr}}(1) \cdot \chi_W(1) \cdot 1 + \chi_{\mathrm{tr}}(12) \cdot \chi_W(12) \cdot 3 + \chi_{\mathrm{tr}}(123) \cdot \chi_W(123) \cdot 2\right) = 0$$

και

$$\langle \chi_W, \chi_W \rangle = \frac{1}{6}\left(\chi_W(1) \cdot \chi_W(1) \cdot 1 + \chi_W(12) \cdot \chi_W(12) \cdot 3 + \chi_W(123) \cdot \chi_W(123) \cdot 2\right) = 1$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

2.1 Κλάσεις Συζυγίας και Στοιχεία της Ομάδας Μεταθέσεων

Ερώτηση

Έστω $\sigma = (a_1 \cdots a_k) \in S_n$ κύκλος μήκους k και $\tau \in S_n$. Τί ισχύει για την μετάθεση $\tau\sigma\tau^{-1}$;

Ισχύει ότι

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a_1) \cdots \tau(a_k))$$

Συνεπώς κάθε συζυγές μετάθεση κύκλου μήκους k είναι κύκλος μήκους k. Αντίστροφα, αν c_1, c_2 κύκλοι μήκους k στην S_n, τότε είναι συζυγείς. Πράγματι, αν

$$c_1 = (a_1 \cdots a_k) \quad \text{και} \quad c_1 = (b_1 \cdots b_k)$$

τότε αν θεωρήσουμε μια $\tau \in S_n$ τ.ω. $\tau(a_i) = b_i$ από την παραπάνω παρατήρηση έχουμε το ζητούμενο.

Ερώτηση

Τί ισχύει με την κλάση συζυγίας μιας τυχαίας $\sigma \in S_n$;

Γνωρίζουμε ότι κάθε σ γράφεται ως γινόμενο ξένων κύκλων ανά δύο. Αν θεωρήσουμε στην γραφή της σε ξένους κύκλους και τους κύκλους μήκους 1, τότε η σ γράφεται ως

$$\sigma = c_1 \cdots c_\ell$$

όπου το c_i κύκλος μήκους n_i και

$$\sum_{i=1}^{\ell} n_i = n$$

Τότε, αν $\tau \in S_n$ έχουμε ότι

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \tau c_1 \cdots c_\ell \tau^{-1} = \prod_{i=1}^{\ell} \tau c_i \tau^{-1} = c_1' \cdots c_\ell'$$

όπου c_i' κύκλος μήκους n_i. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ισχύει ότι κάθε δύο σ_1, σ_2 που επιδέχονται γραφή σε ξένους κύκλους ίδιων μηκών, τότε είναι μεταξύ τους συζυγείς.

Κλάσεις Συζυγίας της S_3

Κάθε μετάθεση στην S_3 είτε θα γράφεται σαν κύκλος μήκους 2 είτε σαν κύκλος μήκους 3. Συνεπώς, ένα σύνολο αντιπροσώπων των κλάσεων της S_3 είναι το

$$\mathrm{Cl}(1) = \{1\} \quad \mathrm{Cl}(12) = \{(12), (13), (23)\} \quad \mathrm{Cl}(123) = \{(123), (132)\}$$

Κλάσεις Συζυγίας της S_4

Κάθε μετάθεση στην S_4 μπορεί να γραφτεί σαν γινόμενο ξένων κύκλων

- Είτε ως κύκλος μήκους 1 (δηλαδή να είναι η 1).
- Είτε ως κύκλος μήκους 2
- Είτε ως κύκλος μήκους 3
- Είτε ως κύκλος μήκους 4
- Είτε ως γινόμενο ξένων κύκλων μήκους 2.

Συνεπώς, ένα σύνολο αντιπροσώπων των κλάσεων συζυγίας της S_4 είναι το

$$1, (12), (123), (1234), (12)(34)$$

με

$$|\mathrm{Cl}(1)| = 1,\ |\mathrm{Cl}(12)| = 6,\ |\mathrm{Cl}(123)| = 8,\ |\mathrm{Cl}(1234)| = 6,\ |\mathrm{Cl}((12)(34))| = 3$$

Αβελιανοποίηση της S_n

Είδαμε ότι για να υπολογίσουμε τις 1-διάστατες αναπαραστάσεις μια ομάδας πρέπει να αναχθούμε στις αντίστοιχες 1-διάστατες αναπαραστάσεις της αβελιανοποίησεις της, δηλαδή της ομάδας

$$G_{\mathrm{ab}} = G/[G, G]$$

όπου $[G, G]$ η αντίστοιχη παράγωγος υποομάδα. Ποια είναι όμως η αβελιανοποίηση της S_n ;

Γνωρίζουμε ότι αν $H \leq G$ κανονική και G/H αβελιανή, τότε $[G, G] \subseteq H$. Στην περίπτωση της S_n, γνωρίζουμε ότι για $n \geq 5$ η A_n είναι απλή συνεπώς με την παραπάνω παρατήρηση έχουμε ότι $[S_n, S_n] = A_n$, επομένως

$$(S_n)_{\mathrm{ab}} = S_n/A_n = \mathbb{Z}_2$$

Αντίστοιχα για $n = 2, \ldots, 4$ αποδεικνύεται ότι $[S_n, S_n] = A_n$. Επομένως, για κάθε $n \geq 2$ έχουμε ότι $(S_n)_{\mathrm{ab}} = \mathbb{Z}_2$.

2.2 Ασκήσεις

Άσκηση 1

Θεωρούμε μια ομάδα G, μια μονοδιάστατη αναπαράσταση της G με αντίστοιχο ομομορφισμό $\sigma\colon G \to \mathbb{C}^*$, και ένα $\mathbb{C}G$ - πρότυπο V , με αντίστοιχο ομομορφισμό $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$.

(α) Να δείξετε ότι η απεικόνιση $g \mapsto \sigma(g)\rho(g),\ g \in G$ στον $\mathbb{C}$ - διανυσματικό χώρο V τη δομή ενός $\mathbb{C}G$ - προτύπου V^σ.

(β) Να δείξετε ότι το $\mathbb{C}G$ - πρότυπο V είναι απλό αν και μόνο αν το $\mathbb{C}G$ - πρότυπο V^σ είναι απλό.

Λύση. (α) Αρκεί να δείξουμε ότι η $\sigma(g)\rho(g) \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$, το οποίο είναι άμεσο αφού $\sigma(g) \neq 0$ και $\rho(g) \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ και ότι $\sigma\rho$ είναι ομομορφισμός ομάδων. Έστω $g, h \in G$. Τότε,

$$\sigma\rho(gh) = \sigma(gh)\rho(gh) = \sigma(g)\sigma(h)\rho(g) \circ \rho(h) = [\sigma(g)\rho(g)] \circ [\sigma(h)\rho(h)]\,.$$

(β) Έστω V ένα $\mathbb{C}G$, πρότυπο και U ένας $\mathbb{C}$ - διανυσματικός υπόχωρος του V. Ο U είναι $\mathbb{C}G$ - υποπρότυπο του V αν και μόνο αν $\rho(g)(U) \subseteq U$, για κάθε $g \in G$ και επειδή U είναι $\mathbb{C}$ - υπόχωρος και $\sigma(g) \neq 0$ αν και μόνο αν $\sigma(g)\rho(g)(U) \subseteq U$. Άρα, U είναι $\mathbb{C}G$ υποπρότυπο του V^σ. Ομοίως δείχνουμε το αντίστροφο και έχουμε το ζητούμενο.

■

Άσκηση 2

Θεωρούμε την ομάδα S_6 των μεταθέσεων σε 6 σύμβολα.

(α) Πόσες (ανα δύο μη - ισόμορφες) ανάγωγες αναπαραστάσεις έχει η ομάδα S_6 επί το σώματος $\mathbb{C}$;

(β) Πόσες (ανα δύο μη - ισόμορφες) μονοδιάστατες αναπαραστάσεις έχει η ομάδα S_6 επί το σώματος $\mathbb{C}$;

(γ) Η ομάδας S_6 δρα στον διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{C}^6 = \bigoplus_{i=1}^6 \mathbb{C}e_i$ μέσω των γραμμικών απεικονίσεων που μεταθέτουν τα διανύσματα $e_1, \ldots, e_6$. Θεωρούμε τον αναλλοίωτο υπόχωρο $U = \mathbb{C}e$, όπου $e = \sum_{i=1}^6 e_i$, και το $\mathbb{C}S_6$ - πρότυπο πηλίκο $W = V/U$. Να υπολογίσετε τον χαρακτήρα χ_W και να συμπεράνετε ότι το $\mathbb{C}S_6$ - πρότυπο W είναι απλό.

(δ) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία ανάγωγη 5-διάστατη αναπαράσταση της S_6 επί του σώματος $\mathbb{C}$, η οποία δεν είναι ισόμορφη με την αναπαράσταση W του ερωτήματος (γ) παραπάνω.

Λύση. Αρχικά σημειώνουμε τις κλάσεις συζυγίας τις ομάδας S_6 καθώς και το πλήθος αυτών

(1)	$\#\mathrm{Cl}(1) = 1$	**(2)**	$\#\mathrm{Cl}(12) = 15$	**(3)**	$\#\mathrm{Cl}(123) = 40$
(4)	$\#\mathrm{Cl}(1234) = 90$	**(5)**	$\#\mathrm{Cl}(12345) = 144$	**(6)**	$\#\mathrm{Cl}(123456) = 120$
(7)	$\#\mathrm{Cl}(12)(34) = 45$	**(8)**	$\#\mathrm{Cl}(12)(34)(56) = 15$	**(9)**	$\#\mathrm{Cl}(12)(3456) = 90$
(10)	$\#\mathrm{Cl}(123)(456) = 40$	**(11)**	$\#\mathrm{Cl}(12)(345) = 120$		

(α) Γνωρίζουμε ότι το πλήθος των ανάγωγων αναπαραστάσεων της S_6 επί του $\mathbb{C}$ ταυτίζεται με το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της S_6, συνεπώς το πλήθος των ανάγωγων αναπαραστάσεων ισούται με 11.

(β) Γνωρίζουμε ότι το πλήθος των 1-διάστατων αναπαραστάσεων της S_6 ταυτίζεται με το $|(S_6)_{\mathrm{ab}}| = |S_6/A_6| = 2$, αφού ισχύει ότι $DS_6 = A_6$. Μάλιστα, οι δύο αυτές αναπαραστάσεις είναι η τετριμμένη και αναπαράσταση πρόσημο σ.

(γ) Έστω ρ η αντίστοιχη αναπαράσταση του $\mathbb{C}S_6$ - προτύπου W. Μέσω του παρακάτω πίνακα, ο πίνακας χαρακτήρων της αναπαράστασης ρ είναι ο εξής :

χ_W	(1) 5	(12) 3	(123) 2
	(1234) 1	(12345) 0	(123456) -1
	$(12)(34)$ 1	$(12)(34)(56)$ -1	$(12)(3456)$ -1
	$(123)(456)$ -1	$(12)(345)$ 0	

Γνωρίζουμε ότι κάθε αντίστροφος των παραπάνω αντιπροσώπων των κλάσεων συζυγίας, είναι συζυγής με τον αντιπρόσωπο, συνεπώς από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι

$$\langle \chi_W, \chi_W \rangle = \sum_{\sigma \in S_6} \frac{\chi_W\left(\sigma^{-1}\right)\chi_W(\sigma)}{|S_6|} = \sum_{[\sigma]\in\mathscr{C}(S_6)} \frac{\gamma_\sigma \chi_W^2(\sigma)}{6!} = 1.$$

όπου γ_σ είναι το πλήθος των αντίστοιχων κλάσεων συζυγίας. Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι το W είναι απλό $\mathbb{C}S_6$ - πρότυπο.

$\rho(1) = I_5$	$\rho(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\rho(123) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\rho(1234) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\rho(12345) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\rho(123456) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
$\rho(12)(34) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\rho(12)(34)(56) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\rho(12)(3456) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\rho(123)(456) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
$\rho(12)(345) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	

(δ) Μέσω της Άσκησης 1 και της αναπαράστασης πρόσημο σ, ορίζεται το $\mathbb{C}S_6$ - πρότυπο W^σ το οποίο είναι απλό από το (γ). Για να δείξουμε ότι W, W^σ δεν είναι ισόμορφα, αρκεί να δείξουμε ότι έχουν διαφορετικούς χαρακτήρες, το οποίο ισχύει αφού $\chi_\rho(12) = 3$, ενώ $\chi_{\sigma\rho}(12) = -3$, διότι $\sigma(12)\rho(12) = -\rho(12)$.

■

Άσκηση 3

Θεωρούμε τον δ.χ. V με βάση $\mathscr{B} = \{v_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq 3\}$ και τη δράση της S_3 στο $\mathscr{B}$

$$\sigma \cdot v_{i,j} = v_{\sigma(i),\sigma(j)}$$

Παραστήστε το χ_V ως γραμμικό συνδυασμό των ανάγωγων χαρακτήρων της S_3. Είναι σωστό ότι το V περιέχει $\mathbb{C}S_3$ - υποπρότυπο ισόμορφο με το κανονικό πρότυπο της $\mathbb{C}S_3$;

Λύση. Αρχικά, θα υπολογίσουμε τον χαρακτήρα του V. έχουμε ότι η δράση του $\sigma \in S_3$ δίνει μονάδα στην διαγώνια της (i, j) στήλης αν και μόνο αν $\sigma(i) = i$ και $\sigma(j) = j$. Άρα,

- Προφανώς, $\chi_V(1) = \dim V = 9$
- Κάτω από την δράση του (12) το μόνο στοιχείο της βάσης που παραμένει σταθερό είναι το $v_{(3,3)}$, συνεπώς $\chi_V(12) = 1$.
- Κάτω από την δράση του (123) δεν παραμένει κανένα στοιχείο της βάσης σταθερό, συνεπώς $\chi_V(123) = 0$.

Έχουμε ότι ο πίνακας χαρακτήρων της S_3 είναι ο

S_3	(1)	(12)	(123)
χ_{tr}	1	1	1
χ_{sign}	1	-1	1
χ_W	2	0	-1

Ισχύει ότι

$$\chi_V = a\chi_{\text{tr}} + b\chi_{\text{sign}} + c\chi_W$$

όπου

$$a = \langle \chi_V, \chi_{\text{tr}} \rangle = 2 \quad b = \langle \chi_V, \chi_{\text{sign}} \rangle = 1 \quad c = \langle \chi_V, \chi_W \rangle = 3$$

■

Άσκηση 4

(α) Να βρείτε της 1 - διάστατες αναπαραστάσεις της A_4.

(β) Να φτιάξετε των πίνακα χαρακτήρων της A_4.

Λύση. (α) Η ομάδα A_4 έχει την παρακάτω αναπαράσταση

$$A_4 = \left\langle a, b \mid a^3, b^2, (ba)^2 \right\rangle$$

όπου $a = (123)$ και $b = (12)(34)$. Η αβελιανοποίηση της A_4 είναι η

$$(A_4)_{ab} = \left\langle a, b \mid a^3, b^2, (ba)^2, aba^{-1}b^{-1} \right\rangle = \left\langle a \mid a^3 \right\rangle = \mathbb{Z}_3$$

Άρα, αν ω είναι μια πρωταρχική ρίζα της μονάδας η A_4 έχει 3 μονοδιάστατες αναπαραστάσεις τις

$$\rho_1(a) = 1 \quad \rho_1(b) = 1$$

την

$$\rho_2(a) = \omega \quad \rho_2(b) = 1$$

και

$$\rho_3(a) = \omega^2 \quad \rho_2(b) = 1$$

(β) Ένα σύνολο αντιπροσώπων για τις κλάσεις συζυγίας της A_4 είναι το

$$\{1, b, a, a^{-1}\}$$

όπου $b = (12)(34)$ και $a = (123)$ με $a^{-1} = (132)$. Εφόσον έχουμε βρει 3 ανάγωγες αναπαραστάσεις και συνολικά είναι 4 αναζητούμε ακόμα 1 ανάγωγη αναπαράσταση ρ_4. Η διάσταση της δίνεται από την σχέση

$$12 = |A_4| = \sum_{i=1}^{4} \dim \rho_i^2 = 3 + \dim \rho_4^2 \Rightarrow \dim \rho_4 = 3$$

Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι η ζητούμενη ανάγωγη αναπαράσταση είναι η $W = V/U$, όπου V το πρότυπο μετάθεσης και $U = \langle \sum_i v_i \rangle$, δείχνοντας ότι $\langle \chi_W, \chi_W \rangle = 1$. Συνεπως, ο ζητούμενος πίνακας χαρακτήρων είναι ο

A_4	(1)	$(12)(34)$	(123)	132
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	-1	0	0

■

Άσκηση 5

Είναι σωστό ότι

(α) Για κάθε ανάγωγο χαρακτήρα χ διαφορετικό του τετριμμένου, ισχύει ότι

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0$$

(β) για κάθε ανάγωγο χαρακτήρα διαφορετικό του χαρακτήρα προσήμου ισχύει ότι

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \chi(\sigma) = 0$$

Λύση. Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι διαφορετικοί ανάγωγοι χαρακτήρες (που αντιστοιχούν σε μη ισόμορφα ανάγωγα πρότυπα) είναι ορθογώνιοι. ■

Άσκηση 6

Δείξτε ότι αν υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{i=1}^{k} |\chi_i(g)|^2 > \frac{|G|}{2}$$

όπου $\chi_1, \ldots, \chi_k$ οι ανάγωγοι χαρακτήρες της G, τότε $g \in Z(G)$.

Λύση. Από τις γνωστές σχέσεις ορθογωνιότητας έχουμε ότι

$$\frac{|G|}{|\mathrm{Cl}(g)|} = \sum_{i=1}^{k} |\chi_i(g)|^2 > \frac{|G|}{2}$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $|\mathrm{Cl}(g)| < 2$ άρα $|\mathrm{Cl}(g)| = 1$. Επομένως, έχουμε το ζητούμενο. ■

Άσκηση 7

Να δείξετε ότι μια ομάδα G είναι αβελιανή αν και μόνο αν κάθε ανάγωγη αναπαράστασή της είναι 1 - διάστατη.

Λύση. Αρχικά υποθέτουμε ότι G είναι αβελιανή. Έστω (V, ρ) ανάγωγη αναπαράσταση της G και $U \leq V$ υπόχωρος. Για κάθε $g \in G$, επειδή η G είναι αβελιανή, τότε η απεικόνιση

$$\rho(g) \colon V \to V,\ v \mapsto g \cdot v$$

είναι ομομορφισμός $\mathbb{C}G$ προτύπων. Από το Λήμμα του Schur έχουμε ότι $\rho(g) = \lambda \mathrm{id}_V$. Άρα, έχουμε ότι

$$g \cdot U = \rho(g)(U) = \lambda \cdot U \leq U$$

Άρα, δείξαμε ότι κάθε υπόχωρος του V είναι G - αναλλοίωτος και αφού V είναι ανάγωγο καταλήγουμε ότι $\dim V = 1$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι κάθε ανάγωγη αναπαράσταση της G είναι ανάγωγη. Γνωρίζουμε ότι το πλήθος των κλασεων συζυγίας ℓ ισούται με το πλήθος των ανάγωγων αναπαραστάσεων $\rho_1, \ldots, \rho_\ell$. Όμως, ισχύει ότι

$$|G| = \sum_{i=1}^{\ell} \dim \rho_i^2 = \ell$$

συνεπώς από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $|G|$ το πλήθος κλάσεις συζυγίας, άρα αναγκαστικά κάθε μια περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο και η G είναι αβελιανή. ∎

Άσκηση 8

Έστω χ χαρακτήρας της G, όπου $\chi(g) = 0$ για κάθε $g \neq 1$. Δείξτε ότι $\chi = m\chi_{\mathrm{reg}}$, όπου χ_{reg} ο χαρακτήρας της κανονικής αναπαράστασης της G.

Λύση. Άμεσο. ∎

Άσκηση 9

Δείξτε ότι η μοναδικές μοναδιάστατες αναπαραστάσεις της S_n είναι η τετριμμένη και η αναπαράσταση πρόσημο.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι οι 1-διάστατες αναπαραστάσεις μια ομάδας G είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τις 1-διάστατες αναπαραστάσεις τις $G_{\mathrm{ab}} = S_n/[S_n, S_n]$. Αποδεικνύεται ότι

$$[S_n, S_n] = A_n$$

Συνεπώς, $G_{ab} = \mathbb{Z}_2$ και έτσι έχουμε το ζητούμενο. ∎

Άσκηση 10

Δίνεται $\mathbb{C}G$ - πρότυπο V και $W \leq V$ ένας $\mathbb{C}G$ - υπόχωρος. Δείξτε ότι

$$V \cong W \oplus V/W$$

Λύση. Θεωρούμε την $\varphi\colon V \to V/W$, η οποία είναι επιμορφισμός $\mathbb{C}G$ - προτύπων με $\ker \pi = W$ και $\mathrm{Im}\varphi = V/W$, όπου είναι ένα $\mathbb{C}G$ - πρότυπο. Από γνωστό θεώρημα της Γ.Α. έχουμε το ζητούμενο. ■

Άσκηση 11

Δίνεται ανάγωγη αναπαράσταση $\rho\colon \mathrm{GL}(V)$.

(α) Αν $\dim_{\mathbb{C}} V \geq 2$ και $v \in V$ δείξτε ότι $\sum_{g\in G} gv = 0$.

(β) Αν $g \in Z(G)$, δείξτε ότι $\rho(g) = \zeta \cdot \mathrm{Id}_V$, όπου ζ είναι μια ρίζα της μονάδας.

Λύση. (α) Αφού ρ είναι ανάγωγη και μη ισόμορφη με την τετριμμένη αναπαράσταση, χρησιμοποιήστε ότι

$$\langle \chi_{\mathrm{tr}}, \chi_\rho \rangle = 0$$

(β) Αφού $g \in Z(G)$, μπορεί να δειχθεί ότι η $\rho(g)$ είναι ομομορφισμός $\mathbb{C}G$ - προτύπων, συνεπώς από το Λήμμα του Schur έχουμε ότι $\rho(g) = \lambda \cdot \mathrm{Id}_V$ με $\lambda \neq 0$. Αν $o(g) = m$, τότε παρατηρήστε ότι

$$I_n = \rho(1) = \rho\left(g^m\right) = (\rho(g))^m = \lambda^m \cdot I_n$$

άρα λ είμαι μια m - οστή ρίζα της μονάδας.

■

Άσκηση 12

Θεωρούμε αναπαράσταση $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ διάστασης d με χαρακτήρα χ. Δείξτε ότι $\chi(g) = d$, για κάθε $g \in G$ αν και μόνο αν $\rho(g)$ είναι ο ταυτοτικός αυτομορφισμός του V, για κάθε $g \in G$.

Λύση. Αν $\rho(g)$ είναι ο ταυτοτικός αυτομορφισμός του V, για κάθε $g \in G$, η μία κατεύθυνση είναι άμεση.

Αρχικά μπορούμε να δείξουμε ότι $\chi(g) = d \cdot \zeta_g$, όπου ζ_g είναι μια ρίζα της μονάδας. Μάλιστα, αφού $\chi(g) = d$, αποδεικνύεται ότι αν $\lambda_{1g}, \ldots, \lambda_{dg}$ οι ιδιοτιμές του $\rho(g)$, τότε

$$\lambda_{ig} = \zeta_g$$

Αφού $\rho(g)^{o(g)} = I_d$, τότε έχουμε ότι $\rho(g)$ είναι διαγωνίσιμη και μάλιστα $\rho(g) = \zeta_g \cdot I_d$. Αφού $\zeta_g = 1$ ($\chi(g) = d = d\zeta_g$), τότε έχουμε το ζητούμενο. ■

Άσκηση 13

(α) Ταξινομήστε (ως προς ισομορφισμό) όλες τις ημιαπλές $\mathbb{C}$ - άλγεβρες διάστασης 10. Μπορεί κάθε μία από αυτές να προκύψει ως άλγεβρα ομάδας $\mathbb{C}G$ μιας ομάδας G τάξης 10 ;

(β) Υπάρχει πεπερασμένη ομάδα $G \cong \mathbb{Z}_{10}$ τέτοια ώστε $\mathbb{C}G \cong \mathbb{C}\mathbb{Z}_{10}$;

(γ) Από εδώ και στο εξής, θεωρούμε την διεδρική ομάδα

$$D_{10} = \langle r, s \mid r^5 = s^2 = (sr)^2 = 1 \rangle$$

που είναι η ομάδα συμμετριών του κανονικού πενταγώνου. Οι κλάσεις συζηγίας της D_{10} είναι :

$$\{1\}, \; \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}, \; \{r, r^4\}, \; \{r^2, r^3\}$$

i. Δείξτε ότι η απεικόνιση

$$\rho\colon D_{10} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \quad \rho(r) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad \rho(s) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

όπου $\vartheta = 2\pi/5$ είναι αναπαράσταση της D_{10}.

ii. Δείξτε ότι η παραπάνω αναπαράσταση είναι ανάγωγη.

iii. Κατασκευάστε τον πίνακα χαρακτήρων της D_{10}.

iv. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα χαρακτήρων της D_{10} βρείτε τις κανονικές υποομάδας της D_{10}.

v. Έστω μια αναπαράσταση της D_{10} στο $\mathbb{C}$ με χαρακτήρα χ. Δείξτε ότι αν $\chi(s) = 0$, τότε $\chi(1)$ είναι άρτιος.

vi. Είναι η D_{10} επιλύσιμη ;

Λύση. (α) Αν R μια $\mathbb{C}$ - ημιαπλή άλγεβρα τότε από το Θεώρημα Weddeburn - Artin έχουμε ότι

$$R \cong \mathbb{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathbb{M}_{n_r}(\mathbb{C})$$

Συνεπώς, έχουμε ότι

$$n_1^2 + \cdots + n_r^2 = 10$$

Άρα, έχουμε ότι

$$n_1 = \cdots = n_{10} = 1 \quad \text{ή} \quad n_1 = n_2 = 2 \text{ και } n_3 = n_4 = 1 \quad \text{ή} \quad n_1 = 3 \text{ και } n_2 = 1$$

Άρα, υπάρχουν τρεις $\mathbb{C}$ - ημιαπλές άλγεβρες ως προς ισομορφισμό. Τώρα, οι μοναδικές ομάδες τάξης 10 (ως προς ισομορφισμό) είναι οι

$$\mathbb{Z}_{10} \quad \text{και} \quad D_{10}$$

Η πρώτη περίπτωση ημιαπλή άλγεβρα είναι ισόμορφη με την άλγεβρα $\mathbb{C}\mathbb{Z}_{10}$. Εφόσον, η D_{10} έχει 4 κλάσεις συζυγίας, τότε η $\mathbb{C}D_{10}$ έχει 4 ανάγωγες αναπαραστάσεις 2 διάστασης 1 και 2 διάστασης 2 (θα το δείξουμε στα παρακάτω ερωτήματα), συνεπώς η δεύτερη περίπτωση είναι ισόμορφη με την $\mathbb{C}D_{10}$.

(β) Για να ισχύει ότι $\mathbb{C}G \cong \mathbb{C}\mathbb{Z}_{10}$, θα πρέπει να ισχύει ότι κάθε ανάγωγη αναπαράσταση της $\mathbb{C}G \cong$ είναι 1-διάστατη, δηλαδή G να είναι αβελιανή. Η μόνη αβελιανή τάξης 10 είναι η $\mathbb{Z}_{10}$, συνεπώς δεν υπάρχει G με τις ζητούμενες ιδιότητες.

(γ) i. Άμεσο. ii.Αρχικά θα βρούμε τις 1-διάστατες αναπαραστάσεις της D_{10}. Άρα, αναγόμαστε τις 1-διάστατες αναπαραστάσεις της

$$(D_{10})_{ab} = \langle r, s \mid r^5 = s^2 = (sr)^2 = 1,\ sr = rs \rangle = \langle s \mid s^2 = 1 \rangle = \mathbb{Z}_2$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι οι 1-διάστατες αναπαραστάσεις της D_{10} είναι η

$$\rho_1(r) = 1 \quad \text{και} \quad \rho_2(s) = 1$$

και

$$\rho_2(r) = 1 \quad \text{και} \quad \rho_2(s) = -1$$

Αρχικά για της ρ έχει ότι

$$\chi_\rho(1) = 2,\ \chi_\rho(r) = 2\cos\vartheta,\ \chi_\rho(s) = 0,\ \chi_\rho\left(r^2\right) = 2\cos^2\vartheta - 2\sin^2\vartheta$$

Αν η ρ δεν είναι ανάγωγη τότε είναι της μορφής

$$\rho = \rho_i \oplus \rho_j$$

$i, j = 1, 2$. Τότε, μάλιστα θα ίσχυε ότι

$$\chi_\rho = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω τότε καταλήγουμε σε άτοπο.

iii. Η D_{10} έχει 4 κλάσεις συζυγίας, άρα 4 ανάγωγες αναπαραστάσεις. Εφόσον γνωρίζουμε τις 3, μέσω των σχέσεων ορθογωνιότητας, θα κατασκευάσουμε τον πίνακα χαρακτήρων της D_{10}. Αρχικά έχουμε ότι

$$10 = |D_{10}| = \sum_{i=1}^{4} \dim\rho_i^2 = 6 + \dim\rho_4^2 \Rightarrow \dim\rho_4 = 2$$

D_{10}	1	s	r	r^2
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1
$\chi_3 = \chi_\rho$	2	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
χ_4	2	a	b	c

Από τις σχέσεις $\langle \chi_4, \chi_i \rangle = 0$ για $i = 1, 2, 3$ προκύπτει το παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned} &a + 2b + 2c = -2 \\ &-a + 2b + 2c = -2 \\ &2b\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + 2c\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = -4 \end{aligned}$$

Από όπου προκύπτει ότι

$$a = 0 \quad b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad c = \frac{1=\sqrt{5}}{2}$$

Άρα, ο ζητούμενος πίνακας χαρακτήρων είναι ο

D_{10}	1	s	r	r^2
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1
$\chi_3 = \chi_\rho$	2	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
χ_4	2	0	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

iii. Αν $N_i = \ker \chi_i$, τότε έχουμε ότι

$$N_1 = D_{10},\ N_2 = \langle r \rangle\,,\ N_3 = N_4 = \{1\}$$

Κάθε κανονική υποομάδα της D_{10} είναι τομή των παραπάνω υποομάδων, συνεπώς οι μοναδικές κανονικές υποομάδες της D_{10} είναι οι παραπάνω.

v. Ο χαρακτήρας χ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\chi_1, \ldots, \chi_4$ επομένως

$$\chi = n_1\chi_1 + n_2\chi_2 + n_3\chi_3 + n_4\chi_4$$

Έχουμε ότι

$$\chi(s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} \chi_i(s) = 0 \Leftrightarrow n_1 = n_2 = n$$

Άρα, έχουμε ότι

$$\chi_1 = \sum_{i=1}^{4} \chi_i(s) = 2n + 2n_3 + 2n_4$$

άρα έχουμε το ζητούμενο.

vii. Αφού $|D_{10}| = 2 \cdot 5$, από το Θεώρημα του Burnside, είναι επιλύσιμη.

■