Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Πρόχειρες Σημειώσεις και Ασκήσεις

Κωνσταντινος Μπιζανος

Αθήνα,
14 Σεπτεμβρίου 2023

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στο αρχείο περιέχεται ένα πακέτο σημειώσεων για το προπτυχιακό μάθημα ''Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις''. Είναι ελλειπές σε αρκετά σημεία και λείπουν ορισμένα κομμάτια από την ύλη το αντίστοιχου προπτυχιακού μαθήματος, όπως τα θεωρήματα συνοριακών τιμών. Στο αρχείο περιέχεται πληθώρα ασκήσεων, όπου στο εγγύς μέλλον πρόκειται να δημοσιευτούν και λύσεις στην πλειψηφία αυτών. Αν παρατηρήσετε κάποιο λάθος τυπογραφικό και όχι μόνο μετά χαράς να μου το επισημάνετε στο ηλεκτρονικό ταχυδρομείο kostasbizanos@gmail.com ή στο bizanosk@math.uoa.gr

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

1.1 Ορισμοί

Ορισμός 1.1.1. Μια **διαφορική εξίσωση** πρώτης τάξης μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$F(t, y, y') = 0 \tag{1.1}$$

όπου F είναι μια συνάρτηση σε ένα χωρίο D. Ζητούνται όλες οι συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις $y = \varphi(t)$ που ορίζονται σε ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και ικανοποιούν ταυτοτικά την σχέση 1.1.

Ορισμός 1.1.2. Η συνάρτηση $y = \varphi(t), \quad t \in I$ θα λέμε ότι είναι λύση της εξίσωσης 1.1 αν για κάθε $t \in I$ ισχύει ότι

(α) $\varphi(t) \in C^1(I)$,

(β) $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in D$

(γ) $F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0$.

Θεωρούμε διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης λυμένης (ή κανονικής μορφής)

$$y' = f(t, y) \tag{1.2}$$

όπου η f είναι συνεχής συνάρτηση. Οι διαφορικές εξισώσεις συνήθως συνοδεύονται από αρχικές συνθήκες. Τότε αναζητούμε λύση της εξίσωσης η οποία να έχει δοσμένη τιμή σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Η διαφορική εξίσωση μαζί με μια αρχική συνθήκη ονομάζεται **πρόβλημα αρχικών τιμών** και συνήθως θα συμβολίζεται με Π.Α.Τ. Άρα, η μορφή του Π.Α.Τ. για διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης (λυμένης μορφής) θα είναι

$$y' = f(t, y), \quad y'(t_0) = y_0 \tag{1.3}$$

Ορισμός 1.1.3. Ορίζουμε ως **λύση του Π.Α.Τ.** 1.3 στο $I \ni t_0$, η συνάρτηση $\varphi(t) \in C^1(I)$, που ικανοποιεί στο I τη σχέση $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, για κάθε $t \in I$, και την αρχική συνθήκη $\varphi(t_0) = y_0$.

1.2 Διαφορική Εξίσωση Χωριζόμενων Μεταβλητών

Ορισμός 1.2.1. Μια διαφορική μορφή χωριζομένων μεταβλητών είναι της μορφής

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(t)h(y)$$

με $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ και $h : (c, d) \to \mathbb{R}$.

Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης.

(α) Αν $h(y) = 0$ για $y = y_k,\ k = 1, 2, \cdots, n$ τότε, $y(t) = y_k,\ t \in (a, b)$.

(β) Αν $h(y) \neq 0$, τότε $\dfrac{y'}{h(y)} = g(t)$ και ολοκληρώνοντας ως προς t προκύπτει $\displaystyle\int \frac{y'}{h(y)}dt = \int g(t)dt + c$.

Για την επίλυση του Π.Α.Τ. $\Big[y' = g(t)h(y), \quad y(t_0) = y_0,\ t_0 \in (a, b)\Big]$

(α) Από την γενική λύση βρίσκουμε c με την βοήθεια της αρχικής συνθήκης.

(β) Με ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{h(y)} = \int_{t_0}^{t} g(t)dt.$$

Παράδειγμα 1.2.1. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $dy = y^2 e^{-x} dx$.

Λύση. Αν $y \neq 0$, παρατηρούμε ότι $-\dfrac{dy}{y^2} = -e^{-x}dx$. Συνεπώς, ολοκληρώνοντας κατά μέλη προκύπτει

$$\int -\frac{dy}{y^2} = \int -e^{-x}dx \Leftrightarrow \frac{1}{y} = e^{-x} + c \Leftrightarrow y = \frac{1}{e^{-x} + c}.$$

Προσοχή ! Στην αρχή υποθέσαμε ότι $y \neq 0$, όμως παρατηρούμε ότι και $y = 0$ είναι λύση της εξίσωσης, συνεπώς οφείλουμε να την συμπεριλάβουμε στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης. ■

Παράδειγμα 1.2.2. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών :

$$y' = (y+1)x, \quad y(0) = 1 \ .$$

Λύση. Αν $y \neq -1$, ολοκληρώνωντας κατά μέλη έχουμε ότι

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int x dx \Leftrightarrow \log|y+1| = \frac{x^2}{2} + c \Leftrightarrow e^{\log|y+1|} = e^{x^2/2+c}$$
$$\Leftrightarrow |y+1| = e^{x^2/2}e^c \Leftrightarrow y = \pm e^{x^2/2}e^c - 1$$

Αν θέσουμε $C = \pm e^c$ έχουμε ότι $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$. Θέτοντας στη τελευταία σχέση $x = 0$ προκύπτει ότι $C = 2$. Συνεπώς, ισχύει ότι $y = 2e^{x^2/2} - 1$. Τέλος έχουμε ότι $y = -1$ δεν μπορεί να αποτελεί λύση της εξίσωσης, αφού ισχύει ότι $y(0) = 1 \neq -1$. ■

Ασκήσεις

1.1. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y' - e^{x-y} = 0, \quad y(0) = 1 \ .$$

1.2. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y' = \cos x(y-1), \quad y(0) = 1 \ .$$

1.3. Λύστε το Π.Α.Τ.

$$e^x e^y y' = e^{-y}, \quad y(0) = 0 \ .$$

1.4. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = \frac{3x^2}{3y^2 - 4}$$

και να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού της λύσης.

1.5. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(x+2)\sin(y) + x\cos(y)y' = 0 \ .$$

1.6. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$\left(1 + x^4\right) yy' - x^3 \left(y^2 + 1\right) = 0, \quad y(1) = 1 \ .$$

1.7. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(x^2-1\right)yy' + 2x\left(y+y^2\right) = 0, \quad x > 1 .$$

1.8. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y' = \frac{2x}{1+y^2}, \quad y(0) = 0$$

και να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της λύσης είναι το $\mathbb{R}$.

1.9. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$3\frac{dy}{dx} = y\cos x.$$

1.10.

1. Να δειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$xf(tx) + tg(tx)x' = 0$$

όπου f και g συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις, μπορεί να μετασχηματιστεί σε διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

2. Χρησιμοποιώντας το 1. να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x - tx^2 - (t+t^2x)x' = 0.$$

1.3 Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις

Ορισμός 1.3.1. Μια συνεχής συνάρτηση $f(x,y),\ (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ ονομάζεται **ομογενής βαθμού** n ως x και y αν για κάθε $(x,y) \in D$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $(\lambda x, \lambda y) \in D$ και

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y) \tag{1.4}$$

Παράδειγμα 1.3.1. Το πολυώνυμο $f(x,y) = x^2+3xy+y^2$ είναι ομογενές βαθμού $n=2$ ως προς x και y, γιατί

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + 3(\lambda x)(\lambda x) + (\lambda y)^2 = \lambda^2 f(x,y) .$$

Θεώρημα 1.3.1. Αν οι συντελεστές $M(x,y)$ και $N(x,y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις του ίδιου βαθμού ως προς x και y, τότε η διαφορική εξίσωση

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1.5}$$

λέγεται **ομογενής** και μπορεί να αναχθεί σε εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών μέσω του μετασχηματισμού

$$v = \frac{y}{x} .$$

Απόδειξη. Επειδή οι M και N είναι συναρτήσεις ομογενείς του ίδιου βαθμού ομογένειας, έστω k, θα έχουμε

$$\begin{aligned} M(x,y) &= M(x,vx) = x^k M(1,v), \\ N(x,y) &= N(x,vx) = x^k N(1,v). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = \frac{M(1,v)}{N(1,v)} = f(v). \tag{1.6}$$

Από την $y = vx$ έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \ ,$$

οπότε η εξίσωση 1.5 λόγω της 1.6 παίρνει τη μορφή

$$v + x\frac{dv}{dx} = -f(v) \ ,$$

που γράφεται

$$\frac{dv}{v+f(v)} = -\frac{dx}{x}$$

που είναι χωριζόμενων μεταβλητών. □

Παράδειγμα 1.3.2. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

Λύση. Οι συναρτήσεις $x+y, x-y$ είναι ομογενείς πρώτου βαθμού. Θεωρούμε των μετασχηματισμό $v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = vx$, για $x \neq 0$, δηλαδή $y' = xv' + v$. Από τον μετασχηματισμό αναγόμαστε στην επίλυση της διαφορικής εξίσωσης

$$xv' + v = \frac{x+vx}{x-vx} \Leftrightarrow xv' + v = \frac{1+v}{1-v}$$

που τελικά γράφεται

$$\frac{1-v}{1+v^2}dv = \frac{dx}{x} \ ,$$

η οποία είναι χωριζόμενων μεταβλητών. Ολοκληρώνουμε και στα δύο μέλη :

$$\begin{aligned} &\int \left(\frac{1}{1+v^2} - \frac{v}{1+v^2} \right) dv = \int \frac{dx}{x} && \Leftrightarrow \\ &\arctan v - \frac{1}{2}\log\left(1+v^2\right) = \log|x| + c_1 && \Leftrightarrow \\ &2\arctan v - \log\left(1+v^2\right) = 2\log|x| + 2c_1 && \Leftrightarrow \\ &2\arctan v = \log x^2\left(1+v^2\right) + 2c_1 \end{aligned}$$

Αφού έχουμε ότι $v = \frac{y}{x}$ για $x \neq 0$, θέτοντας $c = 2c_1$, η γενική λύση δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή

$$2\arctan\frac{y}{x} = \log\left(x^2+y^2\right) + c \ .$$

■

Ασκήσεις

1.11. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y^2 dx - x(x+y)dy = 0 \ .$$

1.12. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{x-y}$$

1.13. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(xe^{\frac{y}{x}} - y\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx + x\sin\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0 \ .$$

1.14. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = e^{2\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \ .$$

1.15. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$2xyy' + x^2 + y^2 = 0 \ .$$

1.16. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - xy}{x^2} \ .$$

1.17. μία σημαντική κατηγορία ομοιογενών διαφορικών εξισώσεων αποτελούν οι **κλασματικές γραμμικές εξισώσεις**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy}, \quad ad - bc \neq 0 \tag{1.7}$$

Να δειχθεί ότι η λύσεις τις (4) δίνονται σε πεπλεγμένη μορφή από τη σχέση

$$x = C\exp\left(\int F(v)dv\right)$$

όπου C είναι μία σταθερά, $v = y/x$ και F μία προσδιορίσιμη συνάρτηση.

1.4 Εξισώσεις που ανάγονται σε ομογενείς

Διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) , \tag{1.8}$$

όπου $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$, ανάγονται σε ομογενείς με μετασχηματισμό μεταφοράς της αρχής των συντεταγμένων στο σημείο τομής (x_1, y_1) των ευθειών με εξισώσεις

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{και} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0 \ .$$

1. Αν $c_1 = c_2 = 0$ τότε η εξίσωση 1.4 είναι της μορφής

   $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right)$$

   που είναι ομογενής βαθμού 1.

2. Στη γενική περίπτωση υποθέτουμε ότι $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ και $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Έστω (x_1, y_1) η μοναδική λύση του συστήματος

   $$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \ . \end{aligned}$$

   Κάνουμε το μετασχηματισμό

   $$X = x - x_1, \quad Y = y - y_1 \ .$$

   Τότε, από την 1.8 έχουμε

   $$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1(X + x_1) + b_1(Y + y_1) + c_1}{a_2(X + x_1) + b_2(Y + y_1) + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) \tag{1.9}$$

Η μέθοδος αυτή δεν μπορεί να εφαρμοσθεί αν οι ευθείες

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{και} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

είναι παράλληλες. Στην περίπτωση αυτή ισχύει :

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$$

και η 1.5 μπορεί να γραφτεί στη μορφή στη μορφή

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = F(a_1x + b_1y) \ .$$

Έτσι μέσω του μετασχηματισμού $z = a_1x + b_1y$ γίνεται διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

Παράδειγμα 1.4.1. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3}.$$

Λύση. Από τη λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} x-y+1&=0\\ x+y-3&=0 \end{aligned}$$

προκύπτει το σημείο τομής $(x_1, y_1) = (1, 2)$. Θέτοντας

$$x = X+1, \quad y = Y+2 \ ,$$

έχουμε

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y} \ ,$$

που είναι ομογενείς εξίσωση βαθμού 1. Ο μετασχηματισμός $v = \frac{Y}{X}$ οδηγεί στην εξίσωση

$$v + X\frac{dv}{dX} = \frac{1-v}{1+v}$$

που είναι χωριζόμενων μεταβλητών. Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\left|1-2v-v^2\right| X^2 = c$$

από την οποία για $v = \frac{Y}{X}$ προκύπτει ότι $\left|X^2 - 2XY - Y^2\right| = c$. Αν $X = x-1$ και $Y = y-2$, τελικά προκύπτει η λύση σε πεπλεγμένη μορφή

$$\left|x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y\right| = c_1, \ c_1 \in \mathbb{R}.$$

∎

Ασκήσεις

1.18. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y+5}{x-y+1} \ .$$

1.19. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(2x-5y+3)dx - (2x+4y-6)dy = 0 \ .$$

1.20. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(2x-2y)dx + (y-1)dy = 0 \ .$$

1.21. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x-y+1} \ .$$

1.5 Γραμμικές εξισώσεις

Ορισμός 1.5.1. Μια συνήθης εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής $y' = f(x, y)$ ονομάζεται **γραμμική** όταν $f(x, y) = -p(x)y + g(x)$, όπου p, g συναρτήσεις ορισμένες σε ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και συνεχείς.

Μέθοδος ολοκληρωτικού παράγοντα

Για την εφαρμογή της μεθόδου σκεπτόμαστε ως εξής : μπορεί να προσδιορισθεί συνεχής συνάρτηση $\mu(x) \neq 0$ (ολοκληρωτικός παράγοντας) τέτοια ώστε το πρώτο μέλος της ισοδύναμης εξίσωσης

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + p(x)\mu(x)y = \mu(x)g(x) \tag{1.10}$$

να ειναι παράγωγος της συνάρτησης $\mu(x)y(x)$;

Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + p(x)\mu(x)y(x) = \frac{d}{dx}\left(m(x)y(x)\right) = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx}y,$$

η οποία, υπό τη προϋπόθεση ότι $\mu(x), y(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, ισοδυναμεί με τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = p(x)\mu(x)$$

η λύση της οποίας

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} \tag{1.11}$$

ικανοποιεί την απαίτηση που θέσαμε.

Αντικαθιστώντας τη $\mu(x)$ στην 1.10 από την 1.11 παίρνουμε τη μορφή

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x) \cdot y(x)\right) = \mu(x)g(x) \tag{1.12}$$

η οποία πλέον λύνεται απευθείας με ολοκλήρωση

$$\mu(x)y(x) = \int \mu(x)g(x)dx + c,$$

ή

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)g(x)dx + c\right] = e^{-\int p(x)dx}\left[\int \mu(x)g(x)dx + c\right].$$

Παράδειγμα 1.5.1. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1, \quad y(1) = 0, \quad x > 0 \ .$$

Λύση. Η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική πρώτης τάξης με $p(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = 1$. Ένας ολοκληρωτικός παράγοντας ισούται με

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\log x} = x \ .$$

Πολλαπλασιάζουμε επί x και τα δύο μέλη της εξίσωσης και ολοκληρώνουμε

$$\frac{d}{dx}(xy) = x \Rightarrow xy = \int x dx + c = \frac{x^2}{2} + c,$$

άρα

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(c + \frac{x^2}{2}\right).$$

Επειδή δίνεται ότι $y(1) = 0$, από τη παραπάνω γενική λύση προκύπτει ότι $c = -\frac{1}{2}$ και

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right), \ x > 0.$$

■

Ασκήσεις

1.22. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y - xy' = 3 - 2x^2y', \quad y(-1) = 1.$$

1.23. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' - y = e^x.$$

1.24. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' - 2y = x.$$

1.25. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$xy' = 2x + 3y.$$

1.26. Να λυθεί το παρακάτω Π.Α.Τ.

$$x(x-1)y' + y = x^2(2x-1), \ y(2) = 4.$$

1.27. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y' \sin x - y \cos x = 0, \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

1.28. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$ty' - y = t^2,\ t > 0.$$

1.29. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + y = \int_0^2 y(t)dt, \quad y(0) = 1.$$

1.30. Να δειχθεί ότι αν a και λ είναι θετικές σταθερές και b οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, τότε κάθε λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' + ay = be^{-\lambda x}$$

έχει την ιδιότητα $y \to 0$ καθώς το $x \to \infty$.
(*Υπόδειξη.* Θεωρήστε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $a = \lambda$ και $a \neq \lambda$.)

1.31. Να προσδιοριστεί το α έτσι ώστε το ακόλουθο Π.Α.Τ. να έχει περιοδική λύση

$$y' - \frac{1}{2}y = 2\sin x, \quad y(0) = \alpha.$$

1.32. Να εξεταστεί η συμπεριφορά των λύσεων της

$$y' = -(\sin x)y + 1$$

καθώς το $x \to \infty$.

1.33 (Σεπτέμβριος 2021)**.** Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$\frac{dy}{dt} + 2\frac{y}{t}\ln y = 4ty, \quad t > 0,\ y > 0$$

αν με την αντικατάσταση $u = \ln y$ μετασχηματίζεται σε γραμμική εξίσωση.

1.6 Εξίσωση Bernoulli

Ορισμός 1.6.1. Κάθε εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής

$$y' + a(x)y = b(x)y^r, \tag{1.13}$$

όπου $a(x), b(x)$ πραγματικές συναρτήσεις συνεχείς σε ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, λέγεται διαφορική εξίσωση του **Bernoulli**.

Για $r = 0$ ή $r = 1$ η εξίσωση 1.13 είναι γραμμική. Επίσης αν $r > 0$ η $y(t) = 0$ είναι λύση της εξίσωσης.

Γενική μέθοδος επίλυσης μια εξίσωσης Bernoulli

Για $r \neq 0, 1$ και $y \neq 0$ η εξίσωση 1.13 είναι μη γραμμική, ωστόσο με το μετασχηματισμό $u = y^{1-r}$ μπορεί να λυθεί σαν γραμμική. Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με $(1-r)y^{-r}$, έχουμε

$$(1-r)y^{-r}y' + (1-r)a(x)y^{1-r} = (1-r)b(x)$$

ενώ παραγωγίζοντας το μετασχηματισμό $u = y^{1-r}$ έχουμε ότι $u' = (1-r)y^{-r}y'$. Έτσι εύκολα προκύπτει ότι

$$u' + (1-r)a(x)u = (1-r)b(x),$$

που είναι γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης και έχει γενική λύση

$$u(x) = e^{-P(x)} \left[\int (1-r)b(t)e^{P(t)}dt + c \right],$$

όπου $P(t) = (1-r)\int a(t)dt$.

Παράδειγμα 1.6.1. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$t\frac{dy}{dt} + 6y = 3ty^{\frac{4}{3}}.$$

Λύση. Για $t \neq 0$ η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$\frac{dy}{dt} + \frac{6}{t}y = 3y^{\frac{4}{3}}$$

που είναι δ.ε. Bernoulli με $r = \frac{4}{3}$, οπότε $1 - r = -\frac{1}{3}$. Για $y \neq 0$, με το μετασχηματισμό $u = y^{-\frac{1}{3}}$, προκύπτει η γραμμική εξίσωση

$$u' - \frac{2}{t}u = -1,$$

της οποίας η γενική λύση είναι

$$u(t) = t + ct^2$$

και αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό, δηλαδή $y = u^{-3}$, προκύπτει η γενική λύση της αρχικής εξίσωσης

$$y(t) = \frac{1}{(t+ct^2)^3},\ t \neq 0.$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι η $y(t) = 0$ είναι επίσης λύση της εξίσωσης. ■

Ασκήσεις

1.34. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση
$$y' + xy = xy^{-3}.$$

1.35. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση
$$y' = y - \frac{1}{4}y^{3/2}.$$

1.36. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση
$$y' + xy = xy^3.$$

1.37. Λύστε το Π.Α.Τ.
$$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{y}, \quad x > 0,\ y(1) = 0.$$

1.38. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση
$$ty' - y - (\log t)y^2 = 0,\ t > 0.$$

1.39. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση
$$y' + \frac{3}{t}y = y^2t^2,\ t > 0.$$

1.40. Να λυθεί το Π.Α.Τ.
$$x^2y' - y^3 = xy, \quad y(1) = \frac{1}{2}$$
και να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού της λύσης.

1.7 Εξίσωση Riccati

Ορισμός 1.7.1. Κάθε εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής
$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x) \tag{1.14}$$
όπου $p(x), q(x), f(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, λέγεται διαφορική εξίσωση του **Riccati**.

Υποθέτουμε ότι είναι γνωστή μια (ειδική) λύση $y_1(x)$ της εξίσωσης 1.14. Θα δείξουμε ότι με αλλαγή μεταβλητής της μορφής
$$y(x) = y_1(x) + u(x),$$
η εξίσωση μετασχηματίζεται σε διαφορική εξίσωση Bernoulli ως προς $u(x)$. Πράγματι, η εξίσωση παίρνει τη μορφή
$$y_1'(x) + u'(x) + p(x)\left(y_1(x) + u(x)\right) + q(x)\left[y_1(x) + u(x)\right]^2 = f(x)$$
καταλήγουμε στην
$$u'(x) + \left[p(x) + 2q(x)y_1(x)\right]u(x) + q(x)u^2(x) = 0,$$
που είναι διαφορική εξίσωση Bernoulli.

Παράδειγμα 1.7.1. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης
$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2.$$

Λύση. Η εξίσωση είναι μια διαφορική εξίσωση Riccati με
$$p(x) = 2x, \quad q(x) = -1, \quad f(x) = 1 + x^2.$$
Γράφοντάς τη στη μορφή
$$y' = 1 + (x - y)^2$$
παρατηρούμε ότι η $y_1(x) = x$ είναι μια ειδική λύση. Εισάγουμε τώρα την αλλαγή μεταβλητής
$$y(x) = y_1(x) + u(x) = x + u(x).$$
Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε
$$1 + u'(x) = 1 + x^2 - 2x\left(x + u(x)\right) + \left(x + u(x)\right)^2 = 1 + u^2(x).$$
Έπεται ότι $u' = u^2$, η οποία είναι χωριζόμενων μεταβλητών και έχει γενική λύση
$$u(x) = \frac{1}{c - x}$$
Επανερχόμαστε στην αρχική μεταβλητή και παίρνουμε την γενική λύση της αρχικής εξίσωσης
$$y(x) = x + \frac{1}{c - x}.$$
■

Ασκήσεις

1.41. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση
$$x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$$
αν γνωρίζουμε ότι μια ειδική λύση της είναι $y_1(x) = \frac{a}{x}$.

(*Υπόδειξη.* Μέσα από την απαίτηση η $y_1(x) = \frac{a}{x}$ να είναι λύση της εξίσωσης προσδιορίζεται η σταθερά a, ώστε να έχουμε μια λύση αυτής και κατόπιν επιλύουμε τη διαφορική εξίσωση.)

1.42. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' - e^x y^2 - 3y - 3e^{-x} = 0,$$

αν $y_1(x) = \lambda e^{-x}$ είναι μια ειδική λύση της.

1.8 Ακριβείς Εξισώσεις

Έστω η διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2. \tag{1.15}$$

Αν

$$f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad N(x, y) \neq 0,$$

η εξίσωση μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα στη (διαφορική) μορφή

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.16}$$

Είναι γνωστό από την Ανάλυση ότι αν μια συνάρτηση $F(x, y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους, τότε υπάρχει το (ολικό) διαφορικό dF της F και είναι

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial x}dy. \tag{1.17}$$

Στη συνέχεια δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.8.1. Η διαφορική μορφή $M(x, y)dx + N(x, y)dy$, όπου M και N είναι συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε ένα τόπο $D \subseteq \mathbb{R}$ και συνεχείς στον D, ονομάζεται **ακριβής** στον D, αν υπάρχει συνάρτηση $F(x, y)$ ορισμένη στον D και με συνεχείς μερικές παραγώγους τέτοια ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N.$$

Τότε, έχουμε :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = dF(x, y). \tag{1.18}$$

Αν λοιπόν η διαφορική μορφή $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ είναι ακριβής, διαφορική εξίσωση 1.16 γράφεται

$$dF(x, y) = 0,$$

και το γενικό ολοκλήρωμα της 1.16 είναι

$$F(x, y) = c,$$

όπου c σταθερά.

Παράδειγμα 1.8.1. Η διαφορική μορφή $ydt+tdy$ είναι ακριβής, διότι η $F(t,y)=ty$ ικανοποιεί την σχεσή

$$dF = d(ty) = ydt + tdy.$$

Επομένως η διαφορική εξίσωση $ydt + tdy = 0$ είναι ακριβής, ισοδύναμα $d(ty) = 0$, που έχει γενικό ολοκλήρωμα $ty = c$, όπου c σταθερά. Συνεπώς η γενική λύση είναι $y = \dfrac{c}{t}$.

Παράδειγμα 1.8.2. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(2ty + ye^t)dt + (t^2 + e^t)dy = 0.$$

Λύση. Αν $M(t,y) = 2ty + ye^t$, $N(t,y) = t^2 + e^t$, τότε η διαφορική μορφή είναι ακριβής, γιατί υπάρχει συνάρτηση

$$F(t,y) = t^2y + e^ty$$

τέτοια ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2ty + ye^t = M(t,y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = t^2 + e^t = N(t,y).$$

Συνεπώς η διαφορική εξίσωση γράφεται $dF = 0$, απ'όπου προκύπτει το γενικό ολοκλήρωμα

$$F(t,y) = t^2y + e^ty = c,$$

όπου c σταθερά, και η γενική λύση διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = \frac{c}{t^2 + e^t},$$

με c σταθερά. ■

Το ερώτημα που προκύπτει στη συνέχεια είναι το εξής: κάτω από ποιες συνθήκες η διαφορική μορφή $M(t,y)dt + N(t,y)dy$ είναι ακριβής και αν είναι, τότε πως προσδιορίζεται η συνάρτηση $F(t,y)$; Η απάντηση σε αυτά τα ερωτήματα δίνεται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.8.1. Έστω $M(t,y), N(t,y)$ συνεχείς και με συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς t και y μέσα σε ένα χωρίο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (απλά συνεκτικό). Υπάρχει συνάρτηση $F(t,y)$, τέτοια ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{dy} = N,$$

αν και μόνο αν

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Παράδειγμα 1.8.3. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(3y + e^t) + (3t + \cos y)\frac{dy}{dt} = 0.$$

Λύση. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0,$$

όπου $M(t,y) = 3y + e^t,\ N(t,y) = 3t + \cos y$. Ισχύει ότι $\frac{\partial M}{\partial y} = 3 = \frac{\partial N}{\partial t}$, άρα η εξίσωση είναι ακριβής. Επομένως, υπάρχει συνάρτηση $F(t,y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 3y + e^t, \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3t + \cos y. \tag{1.20}$$

Από την 1.19 ολοκληρώνοντας ως προς t, έχουμε

$$F = \int (3y + e^t)dt + h(y) = 3ty + e^t + h(y).$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3t + h'(y),$$

η οποία σε συνδυασμό με την 1.20 δίνει την

$$3t + h'(y) = 3t + \cos y.$$

Επομένως

$$h'(y) = \cos y \Rightarrow h(y) = \int \cos y dy = \sin y,$$

οπότε $F(t,y) = 3ty + e^t + \sin y$ και το γενικό ολοκλήρωμα είναι $3ty + e^t + \sin y = c$, όπου c σταθερά. ■

Παράδειγμα 1.8.4. Να εξετασθεί αν είναι ακριβής η εξίσωση

$$e^y dt + (te^y + 2y)dy = 0.$$

Στη συνέχεια, αν είναι ακριβής να λυθεί.

Λύση. Θέτουμε $M(t,y) = e^y,\ N(t,y) = te^y + 2y$, οπότε $\frac{\partial M}{\partial y} = e^y = \frac{\partial N}{\partial t}$. Άρα, η διαφορική εξίσωση είναι ακριβής και κατά συνέπεια υπάρχει συνάρτηση $F(t,y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial t} = e^y \tag{1.21}$$

και

$$\frac{\partial F}{\partial y} = te^y + 2y \tag{1.22}$$

Από την 1.21, ολοκληρώνοντας ως προς t, έχουμε

$$F(t,y) = \int e^y dt + h(y) = te^y + h(y),$$

από όπου προκύπτει

$$\frac{\partial F}{\partial y} = te^y + h'(y),$$

που σε συνδυασμό με την 1.19 δίνει την

$$te^y + h'(y) = te^y + 2y.$$

Άρα, $h'(y) = 2y$ και $h(y) = y^2$ (επιλέγουμε σταθερά ολοκλήρωσης $c = 0$ διότι το c εμφανίζεται στη γενική λύση). Η γενική λύση είναι της μορφής

$$te^y + y^2 = c,$$

όπου c σταθερά. ■

Παράδειγμα 1.8.5. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(6ty - y^3)dt + (4y + 3t^2 - 3ty^2)dy = 0.$$

Λύση. Θέτουμε $M(t,y) = 6ty - 3y^2$, $N(t,y) = 4y + 3t^2 - 3ty^2$ οπότε

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6t - 3y^2 = \frac{\partial N}{\partial t}\ ,$$

άρα η διαφορική εξίσωση είναι ακριβής και υπάρχει συνάρτηση $F(t,y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 6ty - y^3, \tag{1.23}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4y + 3t^2 - 3ty^2 \tag{1.24}$$

Από την 1.23 ολοκληρώνωντας ως προς t έχουμε

$$F(t,y) = \int (6ty - y^3)dt + h(y) = 3t^2y - ty^3 + h(y),$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3t^2 - 3ty^2 + h'(y),$$

που σε συνδυασμό με την 1.24 δίνει

$$3t^2 - 3ty^2 + h'(y) = 4y + 3t^2 - 3ty^2.$$

Άρα,

$$h'(y) = 4y \Rightarrow h(y) = \int 4ydy = 2y^2$$

(επιλέγουμε σταθερά ολοκλήρωσης $c = 0$ διότι το c εμφανίζεται στη γενική λύση). Η γενική λύση είναι

$$3t^2y - ty^3 + 2y^2 = c,$$

όπου c σταθερά. ■

Δεν είναι όμως όλες οι εξίσωσεις ακριβείς. Σε περίπτωση που $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial t}$ κάνουμε χρήση πολλαπλασιαστή Euler $\mu(t, y) = \mu \neq 0$ η εύρεση του οποίου προκύπτει από την σχέση

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial t}.$$

1.43. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(y\cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y + 2)y' = 0.$$

1.44. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0, \quad y(1) = 1.$$

1.45. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t-y} + 1.$$

1.46. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(2ty^2 - 3t^2)dt + (2t^2y + 2t^2y^2 - 2t^3)dy = 0$$

αφού βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu = \mu(y)$.

1.47. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου λ για την οποία η διαφορική εξίσωση

$$ty^2 + \lambda t^2y + t^2(t + y)y' = 0$$

είναι ακριβής και να λυθεί η διαφορική εξίσωση για αυτή την τιμή του λ.

1.48. Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$e^{at+y} + 3t^2y^2 + (2t^3y + e^{at+y})y' = 0 \tag{1.25}$$

Να βρεθεί το a ώστε η 1.25 να είναι ακριβής και να λυθεί η 1.25.

1.49. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(3t + 2y + y^2) + (t + 4yt + 5y^2)\frac{dy}{dt} = 0 \tag{1.26}$$

αν δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(t + y^2)$.
(***Υπόδειξη:*** Χρησιμοποιήστε το κανόνα της αλυσίδας.)

1.50 (Σεπτέμβριος 2021)**.** Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(3t^2y^3 - y^2 + y\right) dt + (2t - ty)\, dy = 0$$

αν δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu(t, y) = t^a y^b$ με $a, b \in \mathbb{R}$.

1.9 Εξισώσεις Clairaut

Ορισμός 1.9.1. Οι εξισώσεις αυτές είναι της ειδικής μορφής

$$y = xy' + g(y') \tag{1.27}$$

θα λέγεται **εξίσωση Clairaut**.

Για την επίλυση της 1.27, θέτουμε $y' = p(x)$ και παραγωγίζουμε ως προς x την εξίσωση που προκύπτει.

$$y = xp + g(p) \tag{1.28}$$

Θα έχουμε

$$y' = p = p + p'x + \frac{dg}{dp}p' \Rightarrow [x + g'(p)]p' = 0.$$

(α) Αν $p' = 0 \Rightarrow p = y' = c$, όπου c είναι μία σταθερά, τότε η λύση της 1.27, όπως προκύπτει από την 1.23, είναι η μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών

$$y = cx + g(c) \tag{1.29}$$

(β) Εαν

$$x + g'(p) = 0$$

και η τελευταία εξίσωση μπορεί να λυθεί ώστε $p = p(x)$, τότε μία άλλη λύση της 1.27, όπως διαβάζουμε από την 1.28, είναι η

$$y = xp(x) + g(p(x)) \tag{1.30}$$

Ασκήσεις

1.51. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση
$$y = ty' + (y')^2.$$

1.52. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση
$$y = xy' + \log y'.$$

1.53. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση
$$y = xy' - (y')^3 .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΘΕΩΡΗΜΑ PICARD

2.1 Εισαγωγή

Ένα από τα πιο σημαντικά θεωρήματα στην θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων είναι το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας του Picard. Είναι εν τέλει αυτό το θεώρημα όμως τόσο σημαντικό; Ας αναλογιστούμε ότι είναι εφαλτήριο (γενικεύοντάς το) για την εγγύηση ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων σε διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης, καθώς και σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Επίσης το συγκεκριμένο θεώρημα απότελεί μια εισαγωγή σε μια ευρεία κλάση θεωρημάτων ύπαρξης και μοναδικότητας που χρησιμοποιούν την ύπαρξη σταθερών σημείων.

Θεώρημα 2.1.1 (Ύπαρξης και μοναδικότητας του Picard)**.** Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς σε ένα κλειστό ορθογώνιο

$$R = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq h_1,\ |y - y_0| \leq a_1\}$$

το οποίο περιέχει το (x_0, y_0) στο εσωτερικό του. Τότε υπάρχει μοναδική λύση σε ένα διάστημα της μορφής $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ με $h > 0$. Επίσης, η ακολουθία συναρτήσεων

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην λύση αυτή στο I.

Παράδειγμα 2.1.1. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = 3y^{2/3}$, $y(2) = 0$. Έχουμε ότι η $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-1/3}$ δεν είναι συνεχής στο 0, επομένως δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος. Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $y^{1/3} = x - 2$ και $y = 0$ είναι λύσεις του Π.Α.Τ., ορισμένες σε κατάλληλα διαστήματα.

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι να αποδειχθεί η ύπαρξη λύσης σε ένα Π.Α.Τ. Ο απλούστερος είναι να την προσδιορίσουμε ρητά και να βρούμε ακριβή τύπο. Μια τέτοια κατηγορία είναι οι γραμμικές πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Παρόλα αυτά αρκετές διαφορικές εξισώσεις δεν μπορούν να επιλυθούν με στοιχειώδεις τρόπους, οπότε η εύρεση αυτών με την προηγούμενη προσέγγιση ""καταρρέει"".

Ένας άλλος τρόπος είναι να την βρούμε προσεγγιστικά, δηλαδή να κατασκευάσουμε κατάλληλη ακολουθία συναρτήσεων που να προσεγγίζει σε μια λύση του Π.Α.Τ. Αυτήν ακριβώς την προσέγγιση θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος του Picard.

Ολοκληρωτική Διατύπωση

Υποθέτουμε ότι στο αρχικό Π.Α.Τ., η f είναι συνεχής σε κάποιο κατάλληλο (ανοικτό) ορθογώνιο και ότι υπάρχει μία λύση $y(x)$ η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα I. Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης έπεται η:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{2.1}$$

Συνεπώς, λόγω των υποθέσεων ύπαρξης και συνέχειας, το Π.Α.Τ. είναι ισοδύναμο με την 2.1. Με μια προσεκτική ματιά παρατηρεί κανείς δύο προβλήματα :

- Η εξίσωση δεν είναι καλά ορισμένη, εκτός αν γνωρίζουμε ότι υπάρχει μια λύση.
- Η εξίσωση είναι πολύ δύσκολη στην επίλυση, εκτός από στοιχειώδη Π.Α.Τ. όπου το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι υπολογίσιμο με στοιχειώδεις τρόπους.

Ορίζουμε έναν τελεστή T, ο οποίος απεικονίζει μια συνάρτηση $y(x)$ σε μία συνάρτηση $T[y](x)$ η οποία δίνεται από:

$$T[y](x) \coloneqq y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

Τότε η 2.1 γίνεται $y = T[y]$ και κάθε λύση του Π.Α.Τ. είναι ένα σταθερό σημείο του T.

Για την εύρεση σταθερών σημείων, συχνά αποδεικνύονται χρήσιμες οι προσεγγιστικές μέθοδοι. Για να βρούμε ένα σταθερό σημείο του μετασχηματισμού T θα χρησιμοποιήσουμε τις λεγόμενες *προσεγγίσεις Picard*[1]. Οι προσεγγίσεις Picard ορίζονται ως εξής: ξεκινάμε με τη συνάρτηση $y_0(x) \equiv y_0$ και θα ορίσουμε τους υπόλοιπους όρους της ακολουθίας αναδρομικά ως εξής:

[1] Συχνά στην βιβλιογραφία μπορεί να χαρακτηρίζεται ως ακολουθία Picard.

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt$$

για να παράξουμε την ακολουθία συναρτήσεων $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$. Αν αυτή η ακολουθία συγκλίνει, το όριό της θα είναι ένα σταθερό σημείο του T.

Παράδειγμα 2.1.2. Θεωρούμε το Π.Α.Τ.

$$y' = 2y, \quad y(0) = 1$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το:

$$y = 1 + \int_0^x 2y dt$$

Συνεπώς, η ακολουθία Picard ορίζεται ως: $y_0(x) \equiv 1$,

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 2y_0(t)dt = 1 + 2x \tag{2.2}$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x 2(1+2t)dt = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} \tag{2.3}$$

κ.ο.κ. Επαγωγικά προκύπτει ότι

$$y_n(x) = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(2x)^n}{n!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(2x)^i}{i!}$$

όπου το n-οστό μερικό άθροισμα είναι η σειρά Maclaurin για το e^{2x}, άρα $y_n(x) \longrightarrow e^{2x}$ καθώς $n \longrightarrow \infty$.

Για να εξετάσουμε τη σύγκλιση (κάτι το οποίο είναι ιδιαίτερα αναγκαίο όταν δεν αναγνωρίζουμε την ακολουθία του Picard), χρειαζόμαστε κάποια έννοια απόστασης μεταξύ συναρτήσεων. Η απόσταση που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του θεωρήματος του Picard βασίζεται στη νόρμα συνάρτησης, η οποία δίνεται από τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.1.1. Έστω $\mathcal{C}[a,b]$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων, οι οποίες είναι συνεχείς στο $[a,b]$. Αν $y \in \mathcal{C}[a,b]$, τότε η νόρμα του y είναι $\|y\| := \max_{x\in[a,b]} |y(x)|$.

Η νόρμα μιας συνάρτησης $y(x)$ μπορεί να θεωρηθεί ως η απόσταση της $y(x)$ και της $y \equiv 0$. Με βάση αυτό μπορούμε να ορίσουμε την απόσταση μεταξύ δύο συναρτήσεων $y, z \in \mathcal{C}[a,b]$ να είναι η νόρμα της $y - z$, ή αλλιώς

$$\|y - z\| = \max_{x\in[a,b]} |y(x) - z(x)|.$$

Μέσα από αυτόν τον υπολογισμό της απόστασης δύο συναρτήσεων, μπορούμε να ορίσουμε τη σύγκλιση μίας ακολουθίας συναρτήσεων σε μία συνάρτηση.

Ορισμός 2.1.2. Μία ακολουθία $\{y_n(x)\}$ συναρτήσεων στο $\mathcal{C}[a,b]$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνάρτηση $y(x) \in \mathcal{C}[a,b]$ αν και μόνο αν $\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0$.

Η έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης μπορεί να γίνει κατανοητή αν θυμηθούμε το Παράδειγμα 2.1.2, όπου είδαμε ότι $y_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2x)^i}{i!}$ και ότι $y(x) = e^{2x}$ στο διάστημα $[0, 1]$. Τότε

$$\begin{aligned}\|y_n - y\| &= \max_{x\in[0,1]} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(2x)^k}{k!} - e^{2x} \right| = \max_{x\in[0,1]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} \right| \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

Συνεπώς, $y_n \xrightarrow{\text{uni}} y$. Μία σημαντική παρατήρηση που πρέπει να γίνει σε αυτό το παράδειγμα είναι ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας $\{y_n(x)\}$ στην $y(x) = e^{2x}$ στο $[a, b]$ συμβαίνει μόνον όταν το διάστημα είναι φραγμένο από τα δεξιά, ισοδύναμα, το b πρέπει να είναι πεπερασμένο. Σε διαφορετική περίπτωση, η ακολουθία δε θα συνέκλινε ομοιόμορφα, καθώς $\|y_n - y\|$ θα ήταν άπειρη, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για το γεγονός ότι αν μια ακολουθία παραγωγίσιμων (και άρα συνεχών) συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε η συνάρτηση στην οποία συγκλίνει είναι και αυτή συνεχής.

2.2 Θεώρημα Σταθερού Σημείου

Θεώρημα 2.2.1 (Σταθερόυ σημείου για τελεστές του Banach)**.** *Έστω S το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στο $[a, b]$ που απέχουν το πολύ μία σταθερή απόσταση $\alpha > 0$ από μία δεδομένη συνάρτηση $y^t(x) \in \mathcal{C}[a, b]$, δηλαδή $S = \{y \in \mathcal{C}[a, b] \mid \|y - y^t\| \leq \alpha\}$. Έστω $G\colon S \to S$ ένας τελεστής ο οποίος είναι μια συστολή στο S, δηλαδή υπάρχει $0 \leq k < 1$ τέτοιο ώστε*

$$\|G[w] - G[z]\| \leq k\|w - z\| \quad \text{για κάθε } w, z \in S.$$

Τότε ο τελεστής G έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο S. Επιπλέον, η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων που ορίζονται από $y_{n+1} := G[y_n],\ n = 0, 1, 2, \ldots$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε αυτό το σταθερό σημείο, για οποιαδήποτε επιλογή αρχικής συνάρτησης $y_0 \in S$.

Παρατήρηση 2.2.1. Για να αποδείξουμε το θεώρημα, πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις της ακολουθίας $y_{n+1} = G[y_n]$ είναι καλά ορισμένες, δηλαδή ότι κάθε y_n είναι στο σύνολο S. Στο τέλος, δείχνουμε ότι αυτό το όριο είναι ένα σταθερό σημείο του G, δηλαδή $y_\infty = G[y_\infty]$.

Απόδειξη. **Ύπαρξη:** Ας πάρουμε μία τυχαία αρχική συνάρτηση $y_0 \in S$. Αφού $y_0 \in \mathrm{Dom}_G$, τότε ορίζεται η $y_1 = G[y_0]$. Αφού G από την αρχική υπόθεση είναι συστολή, τότε είναι άμεσο ότι $y_1 \in S$. Επαγωγικά, προκύπτει ότι $y_n \in S$, επομένως $G[y_n]$ είναι καλά ορισμένη, για κάθε $n \geq 0$.

Τώρα, ας ξαναγράψουμε την $y_n = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1})$, έτσι ώστε

$$y_n(x) = y_0(x) + \sum_{j=0}^{n-1} [y_{j+1}(x) - y_j(x)] \tag{2.4}$$

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{y_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε ένα στοιχείο του S. Αυτό θα γίνει μέσα από την εφαρμογή του M - κριτηρίου του Weierstrass, το οποίο είναι μία επέκταση του κριτηρίου σύγκρισης.[2] Άρα, πρέπει να βρούμε ένα φράγμα M των όρων της σειράς 2.4.

Ισχυρισμός 1. Ισχύει ότι $\|y_{j+1} - y_j\| \leq k^j \|y_1 - y_0\|$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη Ισχυρισμού. Θα δείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο $j \in \mathbb{N}$.

- **Βάση.** Ο ισχυρισμός επαληθεύεται άμεσα για $j = 0$.
- **Επαγωγικό Βήμα.** Έστω ότι ισχύει για για κάποιο $j \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\|y_{j+2} - y_{j+1}\| = \|G[y_{j+1}] - G[y_j]\| \leq k\|y_{j+1} - y_j\| \leq k^{j+1}\|y_1 - y_0\|$$

το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

□

Επιστρέφοντας στη σειρά 2.4, είναι σαφές από τον ισχυρισμό ότι

$$\max_{x \in [a,b]} |y_{j+1}(x) - y_j(x)| = \|y_{j+1} - y_j\| \leq k^j \|y_1 - y_0\|.$$

Έστω $M_j := k^j \|y_1 - y_0\|$. Αφού η $\sum_{j=0}^{\infty} M_j = \|y_0 - y_1\| \sum_{j=0}^{\infty} k^j$ συγκλίνει, το M - κριτήριο του Weierstrass δείχνει ότι η $\{y_n\}_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνεχή συνάρτηση y_∞. Επιπλέον, $y_\infty \in S$. Σε αντίθετη περίπτωση, αν $\|y_\infty - y^t\| > \alpha$ προκύπτει ότι $\|y_n - y^t\| > \alpha$ για κάποιο n, το οποίο αντιφάσκει το γεγονός ότι $y_n \in S$.

Αφού η G είναι συστολή, έχουμε ότι $\|G[y_\infty] - G[y_n]\| \leq k\|y_\infty - y_n\|$ για κάθε n. Όμως, $\|y_\infty - y_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, συνεπώς $\|G[y_\infty] - G[y_n]\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Τελικά,

$$G[y_\infty] - y_\infty = (G[y_\infty] - y_{n+1}) + (y_{n+1} - y_\infty)$$

έτσι ώστε

$$\|G[y_\infty] - y_\infty\| \leq \|G[y_\infty] - y_{n+1}\| + \|y_{n+1} - y_\infty\|.$$

Άρα, είναι σαφές ότι $G[y_\infty] = y_\infty$, συνεπώς η y_∞ είναι ένα σταθερό σημείο του G.

Μοναδικότητα

[2] Η διατύπωση του κριτηρίου καθώς και η απόδειξή του παρατίθεται στο Παράρτημα.

Τώρα, έστω $z \in S$ ένα οποιοδήποτε σταθερό σημείο του G, δηλαδή το z ικανοποιεί την σχέση $G[z] = z$. Τότε

$$\|y_\infty - z\| = \|G[y_\infty] - G[z]\| \leq k\|y_\infty - z\|$$

το οποίο ισχύει αν και μόνο αν $\|y_\infty - z\| = 0$. Με άλλα λόγια, $z = y_\infty$, άρα η y_∞ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο του G. Με αυτό ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου για τελεστές του Banach. □

2.3 Απόδειξη του Θεωρήματος Picard

Θεώρημα 2.3.1 (Ύπαρξης και μοναδικότητας του Picard)**.** Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς σε ένα κλειστό ορθογώνιο

$$R = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq h_1, \ |y - y_0| \leq a_1\}$$

το οποίο περιέχει το (x_0, y_0) στο εσωτερικό του. Τότε υπάρχει μοναδική λύση σε ένα διάστημα της μορφής $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ με $h > 0$. Επίσης, η ακολουθία συναρτήσεων

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην λύση αυτή στο I.

Θυμίζουμε τον τελεστή T που ορίζεται ως $T[y] = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$ και την ακολουθία του Picard που ορίζεται ως εξής :

$$y_0(x) = y_0 \quad \text{και} \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος. Η αποδειξή θα γίνει με χρήση του θεωρήματος σταθερού σημείου για τελεστές του Banach. Για τον σκοπό αυτό αναζητούμε

- κατάλληλο διάστημα $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ και $a > 0$ ώστε
- ο τελεστής T περιορισμένος στο $S = \{g \in \mathcal{C}(I) \mid \|g - y_0\| \leq a_1\}$ να δίνει τιμές στο S και να είναι συστολή.

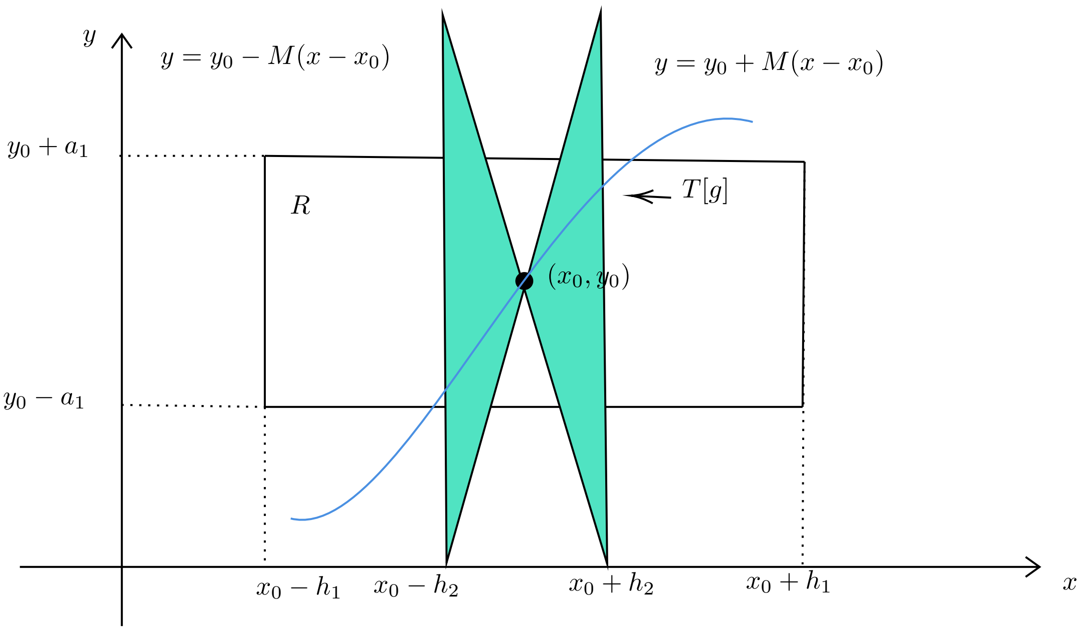
Οι $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς στο R και λόγω της συμπάγειας του R, υπάρχουν $M, L > 0$ τέτοια ώστε

$$|f(x, y)| \leq M \quad \text{και} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq L, \quad (x, y) \in R.$$

Τώρα, αν $I_1 = [x_0 - h_1, x_0 + h_1]$ και $g \in \mathcal{C}(I_1)$ η οποία ικανοποιεί την σχέση $\|g - y_0\| \leq a_1$, τότε για $x \in I_1$ έχουμε ότι

$$|T[g](x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|dt \leq M|x - x_0|.$$

Από γεωμετρική σκοπιά, πρέπει να δείξουμε ότι αν $g \in \mathcal{C}(I_1)$ η οποία ικανοποιεί την σχέση $\|g - y_0\| \leq a_1$, τότε το γράφημα της $T[g]$ πρέπει να βρίσκεται στα τμήματα που φράσσονται από τις ευθείες $y_{1,2} = y_0 \pm M(x - x_0)$ (βλέπε σχήμα). Για να κρατήσουμε το $T[g]$ μέσα στο ορθογώνιο, θέλουμε το ζητούμενο h να ικανοποιεί την σχεση $0 < h < \min\{h_1, a_1/M\}$. Τελικά επιλέγουμε $0 < h < \min\{h_1, a_1/M, 1/L\}$, όπου η τελευταία επιλογή θα δείξει ότι T είναι συστολή στο S.



(α) Ο T απεικονίζει το S στο S. Πράγματι, αν $g \in S$ και $x \in I_1$ τότε έχουμε από πριν ότι

$$|T[g](x) - y_0| \leq M|x - x_0| < Mh < a_1.$$

(β) Ο T είναι συστολή στο S. Έστω $u, v \in S$, τότε έχουμε ότι

$$|T[u](x) - T[v](x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(t, u(t)) - f(t, v(t))] \, dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, u(t)) - f(t, v(t))| \, dt.$$

Τώρα, από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει συνάρτηση $z(t)$ μεταξύ των $u(t)$ και $v(t)$ ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, z(t)) \, [u(t) - v(t)] = f(t, u(t)) - f(t, v(t)).$$

Επομένως, από την προηγούμενη σχέση έχουμε ότι

$$|T[u](x) - T[v](x)| \leq \int_{x_0}^{x} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, z(t)) \, [u(t) - v(t)] \right| dt \leq Lh\|u - v\|$$

με $Lh < 1$, άρα έχουμε το ζητούμενο.

Μας απομένει να λύσουμε ένα λεπτό και εξαιρετικά σημαντικό ζήτημα. Το θεώρημα σταθερού σημείου μας εγγυάται ύπαρξη και μοναδικότητα στο S. Υπάρχει όμως μοναδική λύση στο $I = [x_0 - h, x_0 + h]$; Έστω u μια λύση του Π.Α.Τ. ορισμένη στο I. Τότε,

$$|u(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, u(t)) dt \right| \leq M|x - x_0| \leq a_1.$$

Άρα, $u \in S$ και έχουμε το ζητούμενο. $\square$

2.4 Παράρτημα

Θεώρημα 2.4.1 (M - κριτήριο του Weirstrass)**.** Έστω $\{f_n\}_n$ μία ακολουθία συναρτήσεων ορισμένες σε ένα σύνολο E. Υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει ένας $M_n \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \text{για κάθε } x \in E$$

Τότε, αν η $\sum_n M_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_n f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E.

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει και $M_n \geq 0$ για κάθε n, από το κριτήριο του Cauchy προκύπτει ότι υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m > n > N$ ισχύει ότι

$$\sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon.$$

Άρα, για κάθε $m > n > N$ και κάθε $x \in E$ έχουμε ότι

$$|S_m(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon.$$

Η $S_n(x)$ είναι Cauchy, άρα συγκλίνει σε κάποιο $S(x)$. Για $n > N$ έχουμε

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \lim_{m\to\infty} S_m(x) - S_n(x) \right| = \lim_{m\to\infty} |S_m(x) - S_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Αφού το N δεν εξαρτάται από το x, η S_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην S. Άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

3.1 Προκαταρκτικά

Ορισμός 3.1.1. Μια **γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης** μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$a_0(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = g(t) \tag{3.1}$$

Αν $a_0 \neq 0$, τότε η 3.1 γράφεται ως

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t) \tag{3.2}$$

όπου $a = \frac{a_1}{a_0},\ b = \frac{a_2}{a_0},\ f = \frac{g}{a_0}$.

Συχνά μας εξυπηρετεί να εισάγουμε συμβολισμό διαφορικών τελεστών στην θεωρία των διαφορικών εξισώσεων. Έτσι, ορίζοντας ως L τον διαφορικό τελεστή

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + a(t)\frac{d}{dt} + b(t)$$

η 3.2 γράφεται

$$L(y) = f(t) \tag{3.3}$$

Ορισμός 3.1.2. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς,

(α) Η $L(y) = 0$ λέγεται η αντίστοιχη **ομογενής** της 3.3.

(β) Η 3.3 λέγεται **μη ομογενής**.

Ορισμός 3.1.3. Έστω $\varphi_1, \varphi_2 \colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(α) Δύο συναρτήσεις $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ λέγονται **γραμμικά εξαρτημένες** αν η μία είναι πολλαπλάσιο της άλλης επί μια σταθερά.

(β) Δύο συναρτήσεις $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ λέγονται **γραμμικά ανεξάρτητες** αν ισχύει η ισοδυναμία

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0,$$

για κάθε $t \in I$ και $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 3.1.4. Η **ορίζουσα Wronski** δύο συναρτήσεων $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^1(I)$, όπου διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, είναι η

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t).$$

Θεώρημα 3.1.1 (Τύπος του Liouville)**.** Έστω $\varphi_1, \varphi_2 \colon I \to \mathbb{R}$ λύσεις της $L(y) = 0$, $W(t)$ η ορίζουσα Wronski των φ_1, φ_2 και t_0. Τότε ισχύει ότι

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} -a(s)ds}.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $W(t) = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t)$. Επειδή φ_1, φ_2 είναι λύσεις της $L(y) = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \varphi_1'' &= -a(t)\varphi_1' - b(t)\varphi_1 \\ \varphi_2'' &= -a(t)\varphi_2' - b(t)\varphi_2 \end{aligned}$$

Συνεπώς ισχύει ότι

$$W'(t) = \varphi_1\left[-a(t)\varphi_2' - b(t)\varphi_2\right] - \left[-a(t)\varphi_1' - b(t)\varphi_1\right] = -a(t)W(t).$$

Αν θεωρήσουμε την απεικόνιση $h(t) = W(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} -a(s)ds\right)$ ορισμένη στο I, παρατηρήστε ότι $h'(t) = 0$ από την παραπάνω σχέση, για κάθε $t \in I$. Συνεπώς, $h(t) = h(t_0)$ σταθερή και έχουμε την ζητούμενη σχέση. ∎

Θεώρημα 3.1.2 (Ύπαρξης και Μοναδικότητας)**.** Αν $a(t), b(t), f(t)$ συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα I, τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} L(y) = y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) \\ y(t_0) = a \\ y'(t_0) = b \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση για κάθε αρχική συνθήκη $(t_0, (a, b))$.

Παρατήρηση 3.1.1. Θεωρούμε την γραμμική διαφορική εξίσωση $L[y] = y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n y = 0$.

(α) Αν φ_1, φ_2 λύσεις της $L(y) = 0$, τότε και κάθε γραμμικός συνδυασμός $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$, με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αποτελεί επίσης λύση της $L(y) = 0$. Συνεπώς, ο χώρος λύσεων της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $L[y] = 0$ είναι διανυσματικός χώρος.

Απόδειξη.

$$L(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = L(c_1\varphi_1) + L(c_2\varphi_2) = c_1 L(\varphi_1) + c_2 L(\varphi_2) = 0.$$

□

(β) Ο χώρος λύσεων ή το σύνολο λύσεων της $L(y) = 0$ είναι ένας γραμμικός χώρος διάστασης n.

Θεώρημα 3.1.3. Έστω μια γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής $L[y] = f(t)$ (όχι αναγκαστικά δεύτερης τάξης). Τότε, η γενική λύση της $L[y] = f(t)$ είναι της μορφής

$$y(t) = y_{\text{ομ}}(t) + y_{\text{ειδ}}(t)$$

όπου $y_{\text{ομ}}(t)$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς και $L[y] = 0$ και $y_{\text{ειδ}}(t)$ μια ειδική λύση της $L[y] = f(t)$.

Απόδειξη. Έστω p ειδική λύση της $L[y] = f(t)$, δηλαδή ικανοποιεί την σχέση $L[p] = f(t)$. Θεωρούμε το σύνολο

$$S = \{h + p \mid L[h] = 0\}.$$

Θα δείξουμε ότι το S ισούται με το σύνολο λύσεων Λ της $L[y] = f(t)$. Από τη γραμμικότητα του τελεστή L είναι σαφές ότι $S \subseteq \Lambda$. Αντίστροφα, αν $\varphi \in \Lambda$ τότε έχουμε ότι

$$L[\varphi - p] = L[\varphi] - L[p] = f(t) - f(t) = 0.$$

Άρα, προκύπτει ότι $\varphi = (\varphi - p) + p \in S$, αφού δείξαμε ότι $\varphi - p$ είναι λύση της $L[y] = 0$. □

Αφήνεται στον αναγνώστη να ορίσει και αποδείξη τα αντίστοιχα αποτελέσματα για κάθε γραμμική διαφορική εξίσωση τάξης n.

3.2 Εξισώσεις με μη σταθερούς συντελεστές

Θεωρούμε μια εξίσωση της μορφής $L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, όπου $p, q\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Η παρακάτω μέθοδος που θα περιγράψουμε μας υποδεικνύει, γνωρίζοντας ήδη μια λύση φ_1 της $L[y] = 0$, ένα τρόπο να βρίσκουμε φ_2 γραμμικά ανεξάρτητες με την φ_1 λύσεις της εξίσωσης $L[y] = 0$. Επομένως, από την Παρατήρηση 3.1.1 η γενική λύση της εξίσωσης είναι η

$$y_t = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Μέθοδος με την ορίζουσα Wronski

Έστω $\varphi_1, \varphi_2 \neq 0$ λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $L[y] = 0$. Ισχύει ότι

$$\frac{\varphi_1 \cdot \varphi_2' - \varphi_1' \cdot \varphi_2}{\varphi_1^2} = \frac{W}{\varphi_1^2} \Leftrightarrow \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)' = \frac{W}{\varphi_1^2} \Leftrightarrow \varphi_2 = \varphi_1 \int \frac{W(t)}{\varphi_1^2} dt.$$

Σύμφωνα με τον τύπο του Liouville :

$$\varphi_2 = \varphi_1 \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{\varphi_1^2} dt.$$

Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι φ_1, φ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 3.2.1. Να λυθεί η

$$y'' - \frac{t+1}{t} y' + \frac{1}{t} \cdot y = 0, \quad t > 0$$

αν $\varphi_1(t) = e^t$ είναι μία λύση της.

Λύση. Έχουμε ότι

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \int \frac{e^{-\int p(s)ds}}{\varphi_1^2} dx = e^x \int \frac{e^{\int \frac{t+1}{t} dx}}{e^{2x}} dx = e^x \int \frac{xe^x}{e^{2x}} dx = e^x \int \frac{x}{e^x} dx$$

Έτσι προκύπτει ότι μια επιλογή είναι $\varphi_2(x) = -x-1$. Συνεπώς η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = c_1 e^x + c_2(-x-1), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

3.3 Ομογενείς εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Θεωρούμε μια εξίσωση της μορφής

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{3.4}$$

όπου $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ σταθερές. Η συνάρτηση $y(t) = e^{rt}$ έχει την ιδιότητα ότι οι $y'(t)$ και $y''(t)$ είναι πολλαπλάσιά της. Υποπτεύομαστε λοιπόν ότι έχει νόημα να αναζητούμε λύσεις της παραπάνω μορφής για κατάλληλα $r \in \mathbb{R}$.

Αντικαθιστώντας,

$$L(e^{rt}) = 0 \Rightarrow r^2 e^{rt} + a_1 r e^{rt} + a_2 e^{rt} = 0 \Rightarrow r^2 + a_1 r + a_2 = 0 \tag{3.5}$$

Ορισμός 3.3.1. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς, το $r^2 + a_1 r + a_2$ ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** της 3.4. Η $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** της 3.4.

Θεωρούμε την διακρίνουσα $\Delta = a_1^2 - 4a_2$ της $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

(α) Αν $\Delta > 0$, οι $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ είναι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης, έχουμε ότι $r_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$. Στην περίπτωση αυτή, οι $y_1(t) = e^{r_1 t}$ και $y_2(t) = e^{r_2 t}$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, αφού $W_{(y_1,y_2)}(t) = (r_1 - r_2)e^{(r_1+r_2)}t \neq 0$. Άρα, η γενική λύση είναι η

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(β) Αν $\Delta = 0$, τότε $r_1 = r_2 = -\frac{a_1}{2}$ η λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης και $y(t) = e^{-\frac{a_1 t}{2}}$ είναι μια λύση της εξίσωσης. Εφαρμόζοντας την μέθοδο της παραγράφου 3.2 προκύπτει ότι

$$y_2(t) = y_1(t) \cdot \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1^2(t)} dt, \quad p(t) = a_1.$$

Άρα, μια επιλογή είναι $y_2(t) = t \cdot e^{-\frac{a_1 t}{2}}$, συνεπώς η γενική λύση της εξίσωσης είναι η

$$y(t) = e^{-\frac{a_1 t}{2}}(c_1 + c_2 t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(γ) Αν $\Delta < 0$, τότε η $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ έχει μιγαδικές ρίζες τις $r_{1,2} = \sigma \pm \omega i \in \mathbb{C},\ \sigma, \omega \in \mathbb{R}$. Η γενική λύση στη περίπτωση αυτή (στο $\mathbb{C}$) είναι

$$y(t) = c_1 e^{(\sigma + \omega i)t} + c_2 e^{(\sigma - \omega i)t}.$$

Υπενθυμίζουμε τον **τύπο του Euler** : $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \sin\vartheta$.

Βάσει αυτού του τύπου, η γενική λύση γίνεται

$$y(t) = c_1 e^{\sigma t}\left[(c_1 + c_2)\cos(\omega t) + i(c_1 - c_2)\sin(\omega t)\right].$$

Θέτοντας $\kappa_1 = c_1 + c_2$ και $\kappa_2 = i(c_1 - c_2)$ καταλήγουμε στον τύπο της γενικής λύσης

$$y(t) = e^{\sigma t}\left[\kappa_1 \cos(\omega t) + \kappa_2 \sin(\omega t)\right].$$

Προφανώς, αν περιορίσουμε το εύρος τιμών των κ_1, κ_2 στο $\mathbb{R}$, τότε παρατηρήστε ότι ο παραπάνω τύπος περιγράφει την γενική λύση της $L[y] = 0$, αφού εύκολα αποδεικνύεται ότι οι $e^{\sigma t}\cos(\omega t), e^{\sigma t}\sin(\omega t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες πραγματικές λύσεις της $L[y] = 0$.

Παράδειγμα 3.3.1. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της δοσμένης εξίσωσης είναι η $r^2 - 5r + 6 = 0$ και οι λύσεις της $r_1 = 2$ και $r_2 = 3$. Άρα, έχουμε ότι $y_1(t) = e^{2t}$ και $y_2(t) = e^{3t}$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης. Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$W_{(y_1,y_2)}(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 3e^{5t} - 2e^{5t} = e^{5t} \neq 0.$$

Συνεπώς, η γενική λύση της εξίσωσης είναι η

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

Παράδειγμα 3.3.2. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση $r^2 + 6r + 9 = 0$ έχει λύσεις $r_{1,2} = -3$. Άρα, $y_1(t) = e^{-3t}$ και από γνωστό τύπο έχουμε ότι

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\int 6dt}}{y_1^2(t)} dt \Rightarrow y_2(t) = te^{-3t}.$$

Αφού $W_{(y_1,y_2)}(t) \neq 0$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Έτσι συμπεραίνουμε ότι η γενική λύση της εξίσωσης είναι η

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 te^{-3t}.$$

■

Παράδειγμα 3.3.3. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Λύση. Θεωρώντας την χαρακτηριστικής εξίσωσης έχουμε ότι $r^2 - 4r + 5 = 0$ με $\Delta = -4 < 0$, συνεπώς

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Άρα, έχουμε ότι η γενική λύση είναι της μορφής

$$y(t) = e^{2t} \left(c_1 \cos t + c_2 \sin t \right), \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι ισχύουν αντίστοιχα αποτελέσματα για κάθε διαφορική εξίσωση ανώτερης τάξης.

3.4 Μέθοδος του Lagrange

Θα περιγράψουμε μια γενική μέθοδο επίλυσης της μη ομογενούς εξίσωσης

$$L(y) = y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = f(t) \tag{3.6}$$

με τη προϋπόθεση ότι είναι γνωστή η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς $L(y) = 0$. Τότε, θα δείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε μια ειδική λύση της $L[y] = f(t)$ και με βάση το Θεώρημα 3.1.3 θα είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε τη γενική λύση και της $L[y] = f(t)$.

Έστω φ_1, φ_2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς $L[y] = 0$. Γνωρίζουμε ότι η γενική λύση της $L[y] = 0$ δίνεται από τον τύπο $y(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι να μεταβάλλουμε τις παραμέτρους c_1, c_2, δηλαδή να θέσουμε $c_1 = c_1(t)$ και $c_2 = c_2(t)$ ελπίζοντας ότι έτσι θα βρούμε μια ειδική λύση της $L[y] = f(t)$.

Θεωρούμε λοιπόν $y(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t)$ λύση της αρχικής εξίσωσης. Τότε, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} y'(t) &= c_1'\varphi_1 + c_1\varphi_1 + c_2'\varphi_2 + c_2\varphi_2' \\ y''(t) &= c_1''\varphi_1 + 2c_1'\varphi_1' + c_1\varphi_1'' + c_2''\varphi_2 + 2c_2'\varphi_2' + c_2\varphi_2'' \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση $L[y] = f(t)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = f(t) \\ \Leftrightarrow \quad & (a_1+1)\left(c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2\right) + \left(c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2'\right) = f(t) \end{aligned}$$

Για να ισχύει η τελευταία σχέση, αρκεί να ισχύει ότι

$$\begin{aligned} c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 &= 0 \\ c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' &= f(t) \end{aligned}$$

το οποίο είναι ένα σύστημα με c_1', c_2' ως αγνώστους. Τότε, έχουμε ότι

$$W_{(\varphi_1,\varphi_2)}(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0\ ,$$

αφού φ_1, φ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $L[y] = 0$. Έτσι, το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση και σύμφωνα με τους τύπους του Cramer (βλέπε Γραμμική Άλγεβρα) έχουμε ότι

$$c_1' = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & \varphi_2(t) \\ f(t) & \varphi_2'(t) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2(t) \\ \varphi_1' & \varphi_2'(t) \end{pmatrix}} = \frac{-f(t)\cdot\varphi_2(t)}{W_{(\varphi_1,\varphi_2)}(t)} \Rightarrow c_1(t) = -\int \frac{f(t)\cdot\varphi_2(t)}{W_{(\varphi_1,\varphi_2)}(t)}dt$$

$$c_2' = \frac{\det\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & 0 \\ \varphi_1'(t) & f(t) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2(t) \\ \varphi_1' & \varphi_2'(t) \end{pmatrix}} = \frac{f(t)\cdot\varphi_1(t)}{W_{(\varphi_1,\varphi_2)}(t)} \Rightarrow c_2(t) = \int \frac{f(t)\cdot\varphi_1(t)}{W_{(\varphi_1,\varphi_2)}(t)}dt$$

Επειδή μας ενδιαφέρει η εύρεση μιας ειδικής λύσης της $L[y] = f(t)$, αυθαίρετα, παραλέιψαμε τις προκύπτουσες σταθερές ολοκλήρωσης. Άρα, μια ειδική λύση της $L[y] = f(t)$ είναι

$$y(t) = -\varphi_1(t) \int \frac{f(t) \cdot \varphi_2(t)}{W_{(\varphi_1,\varphi_2)}(t)} dt + \varphi_2(t) \int \frac{f(t) \cdot \varphi_2(t)}{W_{(\varphi_1,\varphi_2)}(t)} dt.$$

Συνεπώς, οι ελπίδες μας ανταμείφθηκαν ! Η παραπάνω μέθοδος επίλυσης μη ομογενούς εξίσωσης καλείται μέθοδος Lagrange ή μέθοδος μεταβολής παραμέτρων.

Παράδειγμα 3.4.1. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - y' - 2y = e^{-t}.$$

Λύση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $p(r) = r^2 - r - 2$, με ρίζες τις $r_1 = -1$ και $r_2 = 2$, και οι δύο με πολλαπλότητα 1, επομένως οι συναρτήσεις $y_1(t) = e^{-t},\ y_2(t) = e^{2t}$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς.

Μια ειδική λύση $y_{\text{ειδ}}(t)$ της μη ομογενούς εξίσωσης είναι της μορφής

$$y_{\text{ειδ}}(t) = c_1(t)e^{-t} + c_2(t)e^{2t},$$

όπου οι $c_1'(t), c_2'(t)$ ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{aligned} c_1'e^{-t} + c_2'e^{2t} &= 0 \\ -c_1'e^{-t} + 2c_2'e^{2t} &= e^{-t} \end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς c_1', c_2' έχουμε

$$c_1'(t) = -\frac{1}{3}, \quad c_2'(t) = \frac{1}{3}e^{-3t}.$$

Με ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$c_1(t) = -\frac{t}{3}, \quad c_2(t) = -\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{9},$$

συνεπώς μία $y_{\text{ειδ}}(t)$ θα δίνεται από την

$$y_{\text{ειδ}}(t) = -\frac{t}{3}e^{-t} - \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{9}e^{2t}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η συνάρτηση $-\frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{9}e^{2t}$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς, μπορούμε να θεωρήσουμε την απλούστερη ειδική λύση $y_{\text{ειδ}}(t) = -\frac{t}{3}e^{-t}$ της μη ομογενούς. Τελικά η γενική λύση της $y'' - y' - 2y = e^{-t}$ έχει τη μορφή

$$y(t) = -\frac{t}{3}e^{-t} + c_1e^{-t} + c_2e^{2t},$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

3.5 Μέθοδος Απροσδιόριστων Συντελεστών

Έστω $L[y] = f(t) \Leftrightarrow y'' + ay' + by = f(t)$ με $a, b \in \mathbb{R}, f(t) \in C(I)$. Αν $f(t)$ είναι εκθετική συνάρτηση, σταθερή, πολυώνυμου του t, τριγωνομετρική συνάρτηση ή συνδυασμός αυτών τότε, γίνεται χρήση της παρακάτω μεθόδου.

Περιγραφή της μεθόδου

Θεωρούμε $y'' + ay' + by = f(t),\ a, b \in \mathbb{R}$ και

$$f(t) = e^{\gamma t}\left[P_n(t)\cos(\delta t) + Q_m(t)\sin(\delta t)\right] \tag{3.7}$$

με $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $P_n(t), Q_m(t) \in \mathbb{R}[t]$ βαθμού n και m αντίστοιχα.

Αν $\gamma + \delta i$ ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, πολλαπλότητας p τότε η μη-ομογενής διαφορική εξίσωση έχει ειδική λύση της μορφής

$$\boxed{y_\epsilon = t^p e^{\gamma t}\left[p_N(t)\cos(\delta t) + q_N(t)\sin(\delta t)\right]}$$

με $p_N(t), q_N(t)$ πολυώνυμα βαθμού $N = \max\{n, m\}$ του t.

Η αρχή της υπέρθεσης

Η παραπάνω μορφή της $f(t)$ για μέσω της οποία έχουμε (ή δεν έχουμε) την δυνατότητα να εφαρμόσουμε την παραπάνω μέθοδο είναι ορισμένες φορές περιοριστική. Παρόλα αυτά ενδέχεται η $f(t)$ να είναι άθροισμα τέτοιων. Σε τέτοιες (και όχι μόνο) περιπτώσεις χρησιμοποιείται η **αρχή της υπέρθεσης** . Έστω η διαφορική εξίσωση

$$L[y] = f_1(t) + f_2(t), \quad f_1(t), f_2(t) \in C(I) \tag{3.8}$$

Θεωρούμε τις διαφορικές εξισώσεις

$$L(y) = f_1(t) \tag{3.9}$$

και

$$L(y) = f_2(t) \tag{3.10}$$

με $y_{\varepsilon_1}(t), y_{\varepsilon_2}(t)$ ειδικές λύσεις των 3.9 και 3.10, αντίστοιχα .Τότε,

$$y_\epsilon(t) = y_{\varepsilon_1}(t) + y_{\varepsilon_2}(t)$$

ειδική λύση της 3.8.

Η παραπάνω θεωρία που αναπτύξαμε μας δίνει ανάλογα αποτελέσματα και σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις τάξης $n > 2$ και αφήνεται στον αναγνώστη η επαλήθευση τους.

Παράδειγμα 3.5.1. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - y + y = x^2.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα λύσουμε την αντίστοιχη ομογενή δ.ε.

$$y'' - y + y = 0 \ ,$$

με χαρακτηριστική εξίσωση $r^2 - r + 1 = 0$ και ρίζες $r_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Άρα έχουμε ότι

$$y_{\text{ομ}} = e^{x/2}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right].$$

Τώρα, αφού x^2 είναι πολυώνυμο βαθμού 2, η ειδική λύση θα είναι της μορφής

$$y_{\text{ειδ}}(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Συνεπώς, έχουμε ότι

$$y''_{\text{ειδ}} - y'_{\text{ειδ}} + y_{\text{ειδ}} = x^2 \Leftrightarrow Ax^2 + (B - 2A)x + 2A - B + C = x^2.$$

Συνεπώς, αναγόμαστε στη επίλυση τους συστήματος

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B - 2A &= 0 \\ 2A + -B + C &= 0 \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε ότι $(A, B, C) = (1, 2, 0)$, άρα $y_{\text{ειδ}} = x^2 + 2x$ και η γενική λύση της εξίσωσης είναι της μορφής

$$y(x) = e^{\frac{x}{2}}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] + x^2 + 2x.$$

□

Παρατήρηση 3.5.1. Αν είχαμε να λύσουμε την δ.ε. $y'' - y' = x^2$, τότε έχουμε ότι το 0 είναι ρίζα του x^2 καθώς και της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 - r = 0$, **πολλαπλότητας 1**, άρα η ειδική λύση θα είναι της μορφής $y_{\text{ειδ}} = x\left(Ax^2 + Bx + C\right)$.

Για τον ίδιο λόγο στην επίλυση της διαφορικής εξίσωσης $y'' = x^2$, αφού το 0 είναι ρίζα του x^2 και της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 = 0$ **πολλαπλότητας 2**, μια ειδική λύση θα είναι της μορφής $y_{\text{ειδ}} = x^2\left(Ax^2 + Bx + C\right)$.

Παράδειγμα 3.5.2. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα λύσουμε την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \ ,$$

όπου μέσω της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 + 4r + 4 = 0$ έχουμε ότι η $y_{\text{ομ}}$ είναι της μορφής

$$y_{\text{ομ}} = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$

Τώρα, έχουμε ότι η $f(x) = 3xe^{-2x}$ είναι της μορφής 3.8 για $\gamma = -2,\ P_1(x) = 3x$ και $\delta = 0$. Συνεπώς, μια υποψήφια ειδικής λύση είναι της μορφής

$$y_{\text{ειδ}} = x^2 e^{-2x}(Ax + B).$$

Ομοίως με Παράδειγμα 3.5.1 υπολογίζουμε ότι $A = \frac{1}{2}$ και $B = 0$, άρα η γενική λύση της εξίσωσης είναι της μορφής

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{1}{2} x^3 e^{-2x}.$$

□

Παράδειγμα 3.5.3. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - 2y' - 3y = 5\sin(3x).$$

Απόδειξη. Αρχικά θα λύσουμε την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση

$$y'' - 2y' + 3y = 0 \ ,$$

όπου μέσω της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 - 2r - 3 = 0$ έχουμε ότι η $y_{\text{ομ}}$ είναι της μορφής

$$y_{\text{ομ}} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}.$$

Τώρα, αφού το $3i$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχουμε ότι μια ειδική λύση είναι της μορφής $y_{\text{ειδ}}(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x)$. Τώρα, παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση και αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση έχουμε ότι $A = \frac{1}{6}$ και $B = -\frac{1}{3}$. Συνεπώς, έχουμε ότι

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{3}\sin(3x).$$

□

3.6 Εξίσωση Euler

Ορισμός 3.6.1. **Εξίσωση Euler** είναι η διαφορική εξίσωση της μορφής :

$$t^2 y'' + aty + by = 0,\ a, b \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Ζητώντας η συνάρτηση t^r με $t>0$ να είναι λύση της εξίσωσης, προκύπτει πως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$r(r-1)+ar+b=0.$$

(α) Αν $\Delta>0$ τότε για r_1, r_2 λύσεις της εξισώσης με $r_1 \neq r_2$ έχουμε ότι η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$y(t)=c_1 t^{r_1}+c_2 t^{r_2}.$$

(β) Αν $\Delta=0$ για $r=\frac{1-a}{2}$ η διπλή λύση της εξίσωσης έχουμε ότι η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$y(t)=c_1 t^r+c_2 \log t t^r.$$

(iii) Αν $\Delta<0$ για $r_{1,2}=\sigma \pm \omega i$ λύσεις της εξίσωσεις έχουμε ότι η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$y(t)=t^\sigma[c_1 \cos(\omega \log t)+c_2 \sin(\omega \log t)].$$

Αφήνεται στον αναγνώστη να συμπληρώσει τις αποδείξεις των παραπάνω προκύπτουσων σχέσων, με όμοια τρόπο σε σχέση με τη παράγραφο 2.3.

3.7 Ασκήσεις

3.1. (α) Αν y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$\left(1+x^2\right) y''-2xy'+2y=0$$

και αν $W_{(y_1,y_2)}(1)=2$ να βρεθεί η τιμή της $W_{(y_1,y_2)}(3)$.

(β) Αν y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$xy''+2y'+xe^x y=0$$

και αν $W_{(y_1,y_2)}(1)=4$ να βρεθεί η τιμή της $W_{(y_1,y_2)}(2)$.

3.2. Αν φ_1, φ_2 είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης :

$$\left(1+x^2\right) y''-2ty'+2y=0$$

με $\varphi_1(1)=\varphi_1'(1)=1, \varphi_2(1)=0$ και $\varphi_2'(1)=2$ να υπολογιστεί η $W(\varphi_1,\varphi_2)(t)$.

3.3. (α) Να δειχθεί ότι η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων

$$x^a, x^b, x^c\ ,$$

όπου $x>0$ ισούται με

$$(a-b)(b-c)(c-a)x^{a+b+c-3}.$$

(β) Να βρεθεί η ορίζουσα Wronski για το ζεύγος συναρτήσεων

$$x^m \sin\log x^n,\ \ x^m \cos\log x^n\ ,$$

για $x > 0$, όπου m και n σταθερές.

3.4. Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων αν η $y_1(x)$ είναι μια λύση αυτών :

(α) $(x+1)y'' - 2y' - (x-1)y = 0,\ x > -1,\ y_1(x) = e^{ax}$

(β) $y'' - (1 + 2\tan^2 x)y = 0, \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2},\ y_1(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

3.5. Να βρεθεί η γενική λύση της παρακάτω διαφορική εξίσωσης

$$x^2y'' - 4xy' + (x^2+6)y = 0,\ x > 0$$

αν $y_1(x) = x^2 \sin x$ είναι μια ειδική λύση της.

3.6. Να εξετασθεί αν οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + x^2 \\ y_2(x) &= 2 + x^2 \\ y_3(x) &= \log x \end{aligned}$$

αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2y''' + xy'' - y' = 0.$$

3.7. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

<u>Υπόδειξη.</u> Αναζητήστε λύση της μορφής $y = x^m$.

3.8. Να βρεθεί η γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων.

(α) $y'' - 6y' + 8y = 0$

(β) $y'' + 6y' + 9y = 0$

(γ) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$

(δ) $y'' + 4y = 0$

3.9. Μια ομογενής γραμμική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές έχει χαρακτηριστική εξίσωση με ρίζες

$$2,\ 2,\ 2,\ 3-4i,\ 3+4i,\ 3-4i,\ 3+4i,\ 3,\ 3.$$

3.10. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y'' + 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -1.$$

3.11. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y' + 4 = \frac{e^{-2x}}{x^2}.$$

3.12. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2(1-\log x)y'' + xy' - y = \frac{(1-\log x)^2}{x},\ x > e$$

αν $y_1(x) = x$ είναι μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς.

3.13. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y'' + y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

3.14. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 3y = t^3 - 1.$$

3.15. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - y = t^2 e^t.$$

3.16. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' + y = t^2 + t + 1.$$

3.17. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 4y = 1 + t + \sin t.$$

3.18. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y = te^t + t\sin(2t).$$

3.19. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορική εξίσωσης

$$y'' + 5y' + 4y = t^2 e^{7t}.$$

3.20. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 2y' + 3y = 1 + te^t.$$

3.21. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = e^t - te^{2t}.$$

3.22. Να λυθεί το ακόλουθο Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y''' + y'' = t + e^{-t} \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1 \end{cases}.$$

3.23. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 4y = 4\cos(2t) + 6\cos(t) + 8t^2 - 4t.$$

3.24. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + ky = \sin bt$$

με $k, b > 0$.

3.25. Αν $a, b, c > 0$, να δειχθεί ότι για κάθε λύση $y = \phi(t)$ της διαφορικής εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

ισχύει

$$\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0.$$

3.26. Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

(α) $y'' + y' - 2y = e^{3t}$

(β) $y'' + y' - 2y = 2e^t$

(γ) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$

(δ) $y'' + y = 3e^t$

(ε) $y'' + 4y = \sin t$

3.27. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x} - 2\cos x + 6\sin x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

3.28. Να βρεθεί η γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων

(α) $t^2y'' + 5ty' - 5y = 0$

(β) $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$

(γ) $t^2y'' + ty' + y = 0$

3.29. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2y'' + xy' + y = \log x, \quad x > 0.$$

3.30. Να λυθεί το ακόλουθο Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} t^2y'' - 3ty' + 4y = 0 \\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

στο διάστημα $(0, \infty)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΩΝ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{4.1}$$

Όπως είδαμε μέχρι τώρα η διαφορική εξίσωση 4.1 έχει εύκολα κατασκευάσιμο χώρο λύσεων στη περίπτωση σταθερών σταθερών συντελεστών, ενώ όταν οι συναρτήσεις $p(t)$ και $q(t)$ είναι μεταβλητές, τότε απαιτείται η γνώση μίας λύσης ώστε να προσδιορισθεί το δεύτερο στοιχείο του.

Παραμένει λοιπόν το ερώτημα πως προσδιορίζουμε τη γενική λύση αν δεν γνωρίζουμε καμία λύση της διαφορικής εξίσωσης 4.1 ; Αναζητούμε επομένως μια πιο γενική μέθοδο κατασκευής του θεμελιώδους συνόλου λύσεων. Μια τέτοια μέθοδος βασίζεται στις δυναμοσειρές και λέγεται μέθοδος των δυναμοσειρών.

4.1 Προκαταρτικά

Ας υπενθυμίσουμε κάποια στοιχεία από τη θεωρία των δυναμοσειρών.

Ορισμός 4.1.1. Μια σειρά της μορφής :

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t-t_0)^n$$

όπου $a_n\in\mathbb{R}$ με $n\in\mathbb{N}$ και $t_0\in\mathbb{R}$ είναι δυναμοσειρά με κέντρο t_0.

Πρόταση 4.1.1. Η δυναμοσειρά, όπως παραπάνω, συγκλίνει για κάθε $t\in(t_0-r,t_0+r)$, όπου r η **ακτίνα σύγκλισης** :

$$r=\limsup_n|a_n/a_{n+1}|=\frac{1}{\limsup_n\sqrt[n]{|a_n|}}\ ,$$

ενώ για κάθε $t\in(-\infty,t_0-r)\cup(t_0+r,+\infty)$ η δυναμοσειρά αποκλίνει.

Παρατήρηση 4.1.1. Η $f(t)$, όπου αυτή ορίζεται, είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(t-t_0)^{n-1}\quad \textit{και}\quad f''(t)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(t-t_0)^{n-2}.$$

Ορισμός 4.1.2. Μια συνάρτηση $f(t)$ η οποία παριστάνεται με μια συγκλίνουσα δυναμοσειρά σε κάποιο διάστημα με κέντρο το t_0 ονομάζεται **αναλυτική συνάρτηση** στο t_0.

Έτσι για τα σημεία x που ανήκουν σε αυτό το διάστημα η f δίνεται από μια συγκλίνουσα δυναμοσειρά

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(t-t_0)^n.$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση n φορές και θέτοντας $t=t_0$ έχουμε ότι

$$c_n=\frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}.$$

Ορισμός 4.1.3. Θεωρούμε την εξίσωση :

$$y''+p(t)y'+q(t)y=0.$$

Ένα σημείο $t_0\in\mathbb{R}$ λέγεται **ομαλό** αν οι p,q είναι αναλυτικές στο t_0. Αν μια τουλάχιστον από τις p,q δεν είναι αναλυτικές στο t_0 τότε το t_0 είναι **ιδιάζων** σημείο της εξίσωσης.

Τέλος παραθέτουμε μερικά βασικά αναπτύγματα Taylor για συναρτήσεις που θα εμφανιστούν (άμεσα) στη συνέχεια του κεφαλαίου.

- $e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$, για κάθε $t\in\mathbb{R}$.

- $\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
- $\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!}$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
- $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad |t| < 1.$
- $\log(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{n}, \quad |t| < 1.$

Υπολογισμός Ακτίνας Σύγκλισης Δυναμοσειράς

(i) Αν έχουμε μια δυναμοσειρά της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ έχουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης ισούται με $\limsup_n |a_n/a_{n+1}| = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}$. Αν οι προηγούμενες ακολουθίες συγκλίνουν, τότε η ακτίνα σύγκλισης ταυτίζεται με τα όρια των προηγούμενων ακολουθιών.

(ii) Αν η συνάρτηση f είναι της μορφής $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, τότε είναι αναλυτική στα σημεία x_0 που ορίζεται, δηλαδή για $Q(x_0) \neq 0$.

Στη προκειμένη περίπτωση, η θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων μας δίνει ένα ευκολότερο τρόπο υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης του αντίστοιχου αναπτύγματος σε δυναμοσειρά της f με κέντρο το x_0.

Αποδεικνύεται ότι ο λόγος τέτοιων πολυωνυμικών συναρτήσεων, έστω $\frac{P(x)}{Q(x)}$ διαθέτει συγκλίνον ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά γύρω από το το x_0 για το οποίο $Q(x_0) \neq 0$.

Επιπλέον έχοντας απλοποιήσει τυχόν κοινούν όρους των $Q(x)$ και $P(x)$, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς για το $\frac{P(x)}{Q(x)}$ γύρω από το x_0 είναι ίση με την απόσταση του σημείου x_0 από την πλησιέστερη ρίζα, συμπεριλαμβανομένων και των μιγαδικών ριζών, του παρονομαστή.

Παράδειγμα 4.1.1. Να υπολογισθεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} t^n$.

Λύση. Αν $a_n = \frac{n}{2^n}$ έχουμε ότι

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{2n}{n+1} \to 2.$$

Συνεπώς, έχουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της σειρά είναι $R = 2$, συνεπώς για $|t| < 2$ συγκλίνει, ενώ για $|t| > 2$ αποκλίνει. Για $t = \pm 2$ η σειρά αποκλίνει (γιατί ;). ∎

Παράδειγμα 4.1.2. Να εξετασθεί αν το σημείο $t_0 = 0$ είναι ομαλό σημείο των παραπάτω δ.ε.

(α) $(1-t^2)y'' - 2ty' + a(a+1)y = 0, \quad a \in \mathbb{R}$ (Εξίσωση Legendre)

(β) $ty'' + (e^t - 1)y' + t^3 y = 0$

Λύση. (α) Ο συντελεστής $p(t) = \frac{-2t}{(1-t^2)}$ και ο συντελεστής $q(t) = \frac{a(a+1)}{(1-t^2)}$ είναι συναρτήσεις αναλυτικές στο μηδέν. Άρα, το $t_0 = 0$ είναι ομαλό σημείο της δ.ε. Τα μόνα ιδιάζοντα σημείο είναι τα σημεία που μηδενίζουν το παρονομαστή, δηλαδή τα $t_{1,2} = \pm 1$.

(β) Για τον συντελεστή $p(t) = \frac{e^t - 1}{t}$ έχουμε ότι

$$p(t) = \frac{e^t - 1}{t} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} - 1}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)!}.$$

Άρα, είναι σαφές ότι p είναι αναλυτική στο 0. Επίσης η συνάρτηση $q(t) = \frac{t^3}{t} = t^2$ είναι αναλυτική στο 0. [1]

■

Παράδειγμα 4.1.3. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης του αναπτύγματος Taylor γύρω από το $t_0 = 0$ της συνάρτησης $f(t) = \frac{1}{t^2 - 2t + 2}$.

Απόδειξη. Το πολυώνυμο $t^2 - 2t + 2$ έχει ρίζες τα $1+i$ και $1-i$ οι οποίες στο μιγαδικό επίπεδο απέχουν $d_1 = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$ και $d_2 = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$ από το 0, αντίστοιχα. Συνεπώς, έχουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης ισούται με $R = \sqrt{2}$. Δηλαδή έχουμε ότι $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ για $|t| < \sqrt{2}$. □

Ασκήσεις

4.1. Να βρεθεί ένα κάτω φράγμα για την ακτίνα σύγκλισης των λύσεων υπό μορφή δυναμοσειράς γύρω από το δοθέν σημείο για την διαφορική εξίσωση :

(α) $\left(1+t^3\right)y'' + ty' + 4y = 0$, για (i) $t_0 = 0$ και (ii) $t_0 = 2$.

(β) $\left(t^3+8\right)y'' + 2ty' + (t+2)y = 0$, για (i) $t_0 = 0$ και (ii) $t_0 = 1$.

[1] Συναρτήσεις όπως οι p, q στη Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων , λέμε ότι έχουν *επουσίωδη ανωμαλία* στο σημείο t_0, καθώς παρότι δεν ορίζονται στο t_0 το γεγονός αυτό δεν εμποδίζει τη σύγκλιση της συνάρτησης στο σημείο αυτό καθώς και το ανάπτυγμα της σε δυναμοσειρά.

(γ) $\left(t^2-2t+3\right)y''+ty'+4y=0$, για (i) $t_0=4$, (ii) $t_0=-4$ και (iii) $t_0=0$.

4.2. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης των παρακάτων δυναμοσειρών.

(α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n(t-1)^n$

(β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}t^n$

(γ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2\cdot 2^n}{(2n)!}(t-2)^n$

4.3. Να εξετασθεί αν το $t_0=0$ είναι ομαλό σημείο των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων.

(α) $t^2y''+ty'+(t^2-p^2)y=0,\quad p\in\mathbb{R}$ (Εξίσωση Euler)

(β) $y''+t^3y'+\sqrt{t}y=0$

4.2 Ομαλά σημεία

Στη προηγούμενη ενότητα περιγράψαμε την έννοια του ομαλού σημείου και τώρα ήρθε η ώρα να τηρήσουμε την υπόσχεση που δώσαμε στην εισαγωγή, ότι μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{4.2}$$

μπορεί να επιλυθεί χωρίς γνώση μια λύσης της.

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι η εξής : Αντί να προσπαθούμε να εκφράσουμε τη λύση μέσω περιορισμένου αριθμού γνωστών συναρτήσεων, να την εκφράσουμε υπό τη μορφή συναμοσειράς $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, η οποία όταν οι συντελεστές είναι γνωστοί, αποτελεί την πλησιέστερη δυνατή αναπαράσταση που μπορεί να έχει κανείς για μια συνάρτηση.

Άλλωστε οι συναρτήσεις που θεωρούνται γνωστές, όπως οι συναρτήσεις $e^t, \cos t, \sin t, \log t$ δεν εκφράζονται σε κλειστή μορφή αλλά ορίζονται και αυτές μέσω κατάλληλων δυναμοσειρών.

Η μέθοδος συνίσταται ως εξής : Υποθέτουμε τη λύση υπό μορφή δυναμοσειράς με το σημείο t_0.

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t-t_0)^n, \tag{4.3}$$

και εισάγοντάς την στη διαφορική εξίσωση υπολογίζουμε τους συντελεστές της δυναμοσειράς. Όμως, η παραπάνω δυναμοσειρά θα πρέπει να συγκλίνει σε κάποια περιοχή του t_0 : $|t-t_0|<R$, όπου συνήθως προσδιορίζεται από την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς, διαφορετικά δεν αναπαριστά συνάρτηση και πολύ περισσότερο λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Ερώτημα 4.2.1. Η μέθοδος μπορεί να εφαρμόζεται πάντα ; **Όχι!** Μάλιστα, αυτό εξαρτάται από τη συμπεριφορά των συναρτήσεων p, q στο σημείο t_0. Η περίπτωση που θα μας απασχολήσει είναι αυτή των αναλυτικών συντελεστών, δηλαδή αυτών που p, q διαθέτουν ανάπτυγμα Taylor στο t_0, δηλαδή η περίπτωση που το t_0 είναι **ομάλό σημείο** της διαφορικής εξίσωσης.

Θεώρημα 4.2.1. Έστω p και q αναλυτικές στο $x_0 \in \mathbb{R}$, με αντίστοιχες σειρές

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n \text{ και } q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n, \tag{4.4}$$

συγλίνουσες για $|x - x_0| < R$. Τότε, η μοναδική εξίσωση της εξίσωσης 4.2 που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = a_0, \;\; y'(x_0) = a_1, \tag{4.5}$$

είναι αναλυτική στο x_0 με σειρά Taylor που συγκλίνει τουλάχιστον για $|x - x_0| < R$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{4.6}$$

και υποθέτουμε ότι συγκλίνει για $|x - x_0| < R$. Οι συντελεστές a_0 και a_1 δίνονται από τις (5), δηλαδή η y ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες 4.5, ενώ οι συντελεστές a_n με $n \geq 2$ θα προσδιοσθούν από την εξίσωση 4.2, της οποία η 4.6 απαιτούμε να είναι λύση. Από τις 4.4 και 4.5 παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n, \\
y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} (x - x_0)^n, \\
p(x) y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} p_{n-k} (x - x_0)^n, \\
q(x) y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k} (x - x_0)^n
\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στην 4.2 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k} \right] (x - x_0)^n = 0.$$

Συνεπώς η y είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης 4.2 αν και μόνο αν οι συντελεστές της σειράς 4.6 ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[\sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k} \right],$$

για $n \geq 0$, ή

$$a_n = -\frac{1}{n(n-1)}\left[\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)a_{k+1}p_{n-k-2} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k q_{n-k-2}\right], \tag{4.7}$$

για $n \geq 2$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

με συντελεστές a_n που δίνονται από την 4.7, συγκλίνει για $|x-x_0| < R$. Αφού οι δυναμοσειρές 4.4 συγκλίνουν για $|x-x_0| = r < R$, θα υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$|p_n| \leq \frac{M}{r^n}, \quad |q_n| \leq \frac{M}{r^n},$$

για $n \geq 0$. Από την αναδρομική σχέση 4.7 έχουμε

$$|a_n| \leq \frac{M}{n(n-1)}\left[\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(k+1)|a_{k+1}|}{r^{n-k-2}} + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{|a_k|}{r^{n-k-2}}\right] \tag{4.8}$$

για $n \geq 2$. Ορίζουμε μια ακολουθία θετικών αριθμών A_n με

$$A_0 \geq |a_0|, \quad A_1 \geq |a_1|$$

και

$$A_n = \frac{M}{n(n-1)}\left[\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(k+1)|a_{k+1}|}{r^{n-k-2}} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{|a_k|}{r^{n-k-2}}\right] \tag{4.9}$$

για $n \geq 2$. Τότε ισχύει

$$|a_n| \leq A_n, \text{ για } n \geq 0 \ , \tag{4.10}$$

αφού από τις 4.8 και 4.9 προκύπτει ότι

$$A_n \geq a_n \geq 0$$

για $n \geq 2$. Από την 4.9, θέτοντας $n+1$ όπου n, έχουμε

$$A_{n+1} = \frac{M}{n(n+1)}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)|a_{k+1}|}{r^{n-k-1}} + \sum_{k=0}^{n}\frac{|a_k|}{r^{n-k-1}}\right] \tag{4.11}$$

και συνδυάζοντας τις 4.9 και 4.11 παίρνουμε

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{r} + M\frac{n+r}{n(n+1)}\frac{|a_n|}{A_n},$$

για $n \geq 2$. Λόγω της 4.10 είναι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{1}{r},$$

δηλαδή η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει για $|x-x_0| < r$. Συνεπώς και η 4.6 συγκλίνει για $|x-x_0| < r < R$. □

Παράδειγμα 4.2.1. Να λυθεί με τη μέθοδο των δυναμοσειρών η διαφορική εξίσωση

$$y'' - y = 0.$$

Λύση. Οι συντελεστές $p(x) = 0$ και $q(x) = -1$ είναι αναλυτικές για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ας αναζητήσουμε λύση αναλυτική στο $x_0 = 0$ της μορφής $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Παραγωγίζοντας έχουμε ότι

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση έχουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)a_{n+2} - a_n\right] x^n = 0,$$

δηλαδή

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)},\ n \in \mathbb{N}$$

Από την αναδρομική σχέση παίρνουμε ότι :

(α) για $n = 0, 2, 4, \cdots$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_0}{1 \cdot 2} \\ a_4 &= \frac{a_2}{3 \cdot 4} \\ a_6 &= \frac{a_4}{5 \cdot 6} \\ &\vdots \\ a_{2k} &= \frac{a_{2k-2}}{(2k-1) \cdot 2k} \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω σχέσεις κατα μέλη έχουμε ότι $a_{2k} = \frac{a_0}{(2k)!}$.

(β) Για $n = 1, 3, 5, \cdots$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{a_1}{2 \cdot 3} \\ a_5 &= \frac{a_3}{4 \cdot 5} \\ a_7 &= \frac{a_5}{6 \cdot 7} \\ &\vdots \\ a_{2k+1} &= \frac{a_{2k-1}}{2k \cdot (2k+1)} \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας λοιπόν κατά μέλη έχουμε ότι $a_{2k+1} = \frac{a_1}{(2k+1)!}$. Άρα, η γενική λύση της εξίσωσης είναι η

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

■

Παράδειγμα 4.2.2. Να βρεθεί με την μέθοδο των δυναμοσειρών η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + xy' + y = 0$$

γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

Λύση. Οι συντελεστές $p(x) = x$ και $q(x) = 1$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο $x_0 = 0$, συνεπώς η εξίσωση επιδέχεται λύση της μορφής $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Παραγωγίζοντας έχουμε ότι

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση έχουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n+1)a_n\right] x^n \Rightarrow a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2},\ n \in \mathbb{N}.$$

Η παραπάνω αναδρομική σχέση είναι με 2 βήματα συνεπώς έχουμε ότι

(α) για $n = 0, 2, 4, \cdots$

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{4} \\ a_6 &= -\frac{a_4}{6} \\ &\vdots \\ a_{2k} &= -\frac{a_{2k-2}}{2k} \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω σχέσεις κατα μέλη έχουμε ότι

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^k k!} a_0.$$

(β) Για $n = 1, 3, 5, \cdots$

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{a_1}{3} \\ a_5 &= -\frac{a_3}{5} \\ a_7 &= -\frac{a_5}{7} \\ &\vdots \\ a_{2k+1} &= -\frac{a_{2k-1}}{2k+1} \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας λοιπόν κατά μέλη προκύπτει ότι

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k 2^k k!}{(2k+1)!} a_1.$$

Άρα, η γενική λύση της εξίσωσης είναι η

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k k!}{(2k+1)!} x^{2n+1} \\ &= a_0 e^{-x^2/2} + a_1 + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k k!}{(2k+1)!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 4.2.3. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - xy = 0, \ -\infty < x < \infty.$$

Λύση. Έχουμε ότι οι συντελεστές $p(x) = 0$ και $q(x) = -x$ είναι αναλυτικές σε κάθε σημείο, συνεπώς η εξίσωση επιδέχεται λύση της μορφής $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Παραγωγίζοντας έχουμε ότι

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση έχουμε ότι

$$a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}\right] x^n = 0 \Rightarrow a_2 = 0, \ a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}.$$

όπου η τελευταία σχέση είναι αναδρομική σχέση σε 3 βήματα. Έτσι αναζητούμε τις ακολουθίες $a_{3k}, a_{3k+1}, a_{3k+2}$. Έτσι ομοίως με τα προηγούμενα παραδείγματα έχουμε ότι

$$a_{3k} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot (3k-2)}{(3k)!} a_0, \ k \in \mathbb{N}$$

και

$$a_{3k+1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!} a_1, \ k \in \mathbb{N}$$

ενώ αφού $a_2 = 0$, έχουμε ότι $a_{3k+2} = 0$. Επομένως έχουμε ότι

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot (3n-2)}{(3n)!} x^{3n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{(3n+1)!} x^{3n+1}.$$

■

Ασκήσεις

4.4. Να λυθεί, με τη μέθοδο των δυναμοσειρών, η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y = 0.$$

4.5. Να λυθεί, με τη μέθοδο των δυναμοσειρών, η διαφορική εξίσωση

$$y' - y = 0$$

4.6. Να λυθεί, με τη μέθοδο των δυναμοσειρών, η διαφορική εξίσωση

$$(1 + t^2)y'' + ty' - y = 0$$

γύρω από το σημείο $t_0 = 0$.

4.7. Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + ty' - y = 0, \ t \in \mathbb{R}.$$

4.8. Αν $\varepsilon > 0$, να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y'' + e^{-\varepsilon t} y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

4.9. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + \sin(t) y = t^2, \ t \in \mathbb{R}.$$

4.3 Εξίσωση Legendre

Ορισμός 4.3.1. Μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + a(a+1) = 0, \quad a \in \mathbb{R} \tag{4.12}$$

λέγεται **εξίσωση Legendre** τάξης a.

Έχουμε ότι οι συντελεστές της 4.12, $p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$ και $q(x) = \frac{a(a+1)}{1-x^2}$ είναι αναλυτικές στο $x_0 = 0$, συνεπώς το $x_0 = 0$ είναι ομαλό σημείο της διαφορικής εξίσωσης και οι σειρές Taylor των p, q συγκλίνουν για $|x| < 1$ (άσκηση).

Έτσι, από το θεώρημα της προηγούμενης παραγράφου έχουμε ότι η 4.12 επιδέχεται λύση της μορφής $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ και παραγωγίζοντας έχουμε ότι

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση έχουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + \left(n^2 - n + a^2 + a\right) a_n\right] x^n = 0 \ ,$$

άρα προκύπτει ότι

$$a_{n+2} = -\frac{(a-n)(a+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

Αφήνεται στον αναγνώστη να επαληθεύσει ότι y_1, y_2 αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων της διαφορικής εξίσωσης όπου

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n a(a-2)(a-4)\cdots(a-2n+2)(a+1)(a+3)\cdots(a+2n-1)}{(2n)!}\right] x^{2n} \tag{4.13}$$

και

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n (a-1)(a-3)\cdots(a-2n+1)(a+2)(a+4)\cdots(a+2n)}{(2n+1)!}\right] x^{2n+1} \tag{4.14}$$

Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει με χρήση της ορίζουσας Wronski ότι y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσης της εξίσωσης.

Με βάση τα παραπάνω στην ειδική περίπτωση που $a = n \in \mathbb{R}$ η 4.12 έχει πολυωνυμική ειδική λύση βαθμού n. Τη λύση αυτή τη συμβολίζουμε με $P_n(x)$. Μάλιστα, αφού ο χώρος λύσεων της διαφορικής εξίσωσης είναι γραμμικός μπορούμε να επιλέξουμε τη πολυωνυμική λύση βαθμού n ώστε $P_n(1) = 1$. (Αν $p_n(t)$ η πολυωνυμική λύση της εξίσωσης, τότε θέτουμε $P_n(t) = \frac{p_n(t)}{p_n(1)}$.)

Ορισμός 4.3.2. Με τον παραπάνω συμβολισμό τα πολυώνυμα $P_n(x)$ ονομάζονται **πολυώνυμα Legendre** βαθμού n ή **συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους** τάξης n.

Αποδεικνύεται ότι τα πολυώνυμα Legendre δίνονται από τον **τύπο Rodrigues**

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n .$$

Ορθογωνιότητα Πολυωνύμων Legendre

Για $n \neq m$ έχουμε ότι P_n, P_m λύσεις της 4.12 συνεπώς ισχύει ότι

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

και

$$(1 - x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας την 1η σχέση με $P_m(x)$ και την 2η με $P_n(x)$ και αφαιρώντας κατά μέλη και κατόπιν ολοκληρώνωντας στο $[-1, 1]$ αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0.$$

Ασκήσεις

4.10. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$(4 - x^2)y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

4.11. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 30y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

4.12. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

4.13. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $P_5 = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)$ ικανοποιεί μια διαφορική εξίσωση Legendre για κατάλληλη τάξη a.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

5.1 Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Στην παρακάτω παράγραφο παρούσιάζονται συνοπτικά στοιχεία από τη Γραμμική Άλγεβρα που θα χρησιμοποιηθούν στις παρακάτω παραγράφους.

Ορισμός 5.1.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n},\ \lambda \in \mathbb{F}$ και $X \in \mathbb{F}^{n\times 1},\ X \neq 0$. Αν ισχύει η σχέση

$$AX = \lambda X \tag{5.1}$$

θα λέμε ότι λ είναι **ιδιοτιμή** του A και το X είναι αντίστοιχο **ιδιοδιάνυσμα** του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Παράδειγμα 5.1.1. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(i) Έχουμε ότι $AX = X$, άρα το 1 είναι ιδιοτιμή του A και X αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A.

(ii) Έχουμε ότι $AY = -Y$, άρα το -1 είναι ιδιοτιμή του A και Y αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A.

(iii) Έχουμε ότι $AZ = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ το οποίο να ικανοποιεί τη σχέση $\lambda Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, οπότε το Z δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A.

Παράδειγμα 5.1.2. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Θα βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A.

Απόδειξη. Έστω $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Για την εύρεση των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση 5.1 και σκοπεύουμε να προσδιορίσουμε τα λ και X. Άρα έχουμε

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + 3y \\ 4x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = \lambda y \\ x + 3y = \lambda x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + (2-\lambda)y = 0 \\ (1-\lambda)x + 3y = 0 \end{cases}$$

όπου το τελευταίο σύστημα είναι γραμμικό ομογενές σύστημα και έχει μη-μηδενική λύση αν και μόνο αν ισχύει :

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 \quad \text{ή} \quad \lambda = -2\ .$$

Άρα προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda = 5$ και $\lambda = -2$. Τώρα θα προσδιορίσουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους.

(i) Για την ιδιοτιμή $\lambda = -2$ έχουμε πως ικανοποιείται η σχέση $3x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = -x$. Επομένως ισχύει ότι
$$V(-2) = \left\{X \in \mathbb{R}^{2\times 1} \mid y = -x\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
είναι το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του A για $\lambda = -2$.

(ii) Για την ιδιοτιμή $\lambda = 5$ έχουμε πως ικανοποιείται η σχέση $-4x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x$. Επομένως ισχύει ότι
$$V(5) = \left\{X \in \mathbb{R}^{2\times 1} \mid y = \frac{4}{3}x\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ \frac{4x}{3} \end{pmatrix}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \right\rangle$$
είναι το σύνολο το ιδιοδιανυσμάτων του A για $\lambda = 5$.

$\square$

Παράδειγμα 5.1.3. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

(a) Υποθέτουμε ότι $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$. Τότε παρατηρούμε ότι

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x - y & = 0 \\ x + \lambda y & = 0 \end{cases},$$

δηλαδή ισχύει ότι $\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, άρα δεν υπάρχουν ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του A στο $\mathbb{R}$.

(b) Αν υποθέσουμε ότι $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ για $\lambda \in \mathbb{C}$ και $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 1}$ ισχύει ότι

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x - y & = 0 \\ x + \lambda y & = 0 \end{cases},$$

όπου το σύστημα έχει μη-μηδενική λύση ανν $\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = i$ ή $\lambda = -i$.

(i) Για την ιδιοτιμή $\lambda = i$ έχουμε πως ικανοποιείται η σχέση $ix - y = 0 \Leftrightarrow y = ix$. Επομένως ισχύει ότι

$$V(i) = \left\{X \in \mathbb{C}^{2\times 1} \mid y = ix\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$$

είναι το σύνολο το ιδιοδιανυσμάτων του A, που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = i$.

(ii) Για την ιδιοτιμή $\lambda = -i$ έχουμε πως ικανοποιείται η σχέση $-ix - y = 0 \Leftrightarrow y = -ix$. Επομένως ισχύει ότι

$$V(-i) = \left\{X \in \mathbb{C}^{2\times 1} \mid y = -ix\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$$

είναι το σύνολο το ιδιοδιανυσμάτων του A, που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = -i$.

Ιδιότητες 5.1.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}, \lambda \in \mathbb{F}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) Το λ είναι ιδιοτιμή του A.

(ii) Υπάρχει $X \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ με $X \neq 0$ τέτοιο ώστε $(A - \lambda I_n)X = 0$.

(iii) $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Απόδειξη.

- (i) $\to$ (ii) Από τον ορισμό υπάρχει $X \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ με $X \neq 0$ ώστε να ισχύει το εξής :

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = 0.$$

- (ii) $\to$ (iii) Η συνεπαγωγή έπεται άμεσα από την εξής πρόταση :

Αν $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $BX = 0$ έχει μη -μηδενική λύση αν και μόνο αν $\det B = 0$.

(iii) $\to$ (i) Έχουμε ότι $\det(A-\lambda I_n)=0$ αν και μόνο αν υπάρχει $X \neq 0$ με $(A-\lambda I_n)X = 0 \Leftrightarrow AX = \lambda X$, όπου έπεται ότι το λ είναι ιδιοτιμή του A. □

Πρόταση 5.1.1. Έστω $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ κάποιες από τις διακεκριμένες ιδιοτιμές του πίνακα A.Έστω $X_1, \cdots, X_s \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ με $X_i \in V_A(\lambda_i)$, για κάθε $i \in \{1, 2, \cdots, s\}$. Αν $X_1 + \cdots + X_s = 0$, τότε $X_1 = X_2 = \cdots = X_s = 0$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με χρήση επαγωγής στο s.

- **Βάση.** Για $s = 1$ το ζητούμενο έπεται κατά τετριμμένο τρόπο.
- **Επαγωγικό Βήμα.** Έστω πως το ζητούμενο ισχύει για κάποιο $s-1 \in \mathbb{N}$.Υποθέτουμε λοιπόν ότι υπάρχουν $X_1, \cdots, X_s \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ ώστε να ισχύει το εξής :

$$X_1 + \cdots + X_s = 0 \tag{5.2}$$

Τότε

$$AX_1 + \cdots AX_s = 0 \tag{5.3}$$

δηλαδή

$$\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_s X_s = 0 \tag{5.4}$$

Άρα έχουμε το εξής :

$$6.4 - 5.2 \Leftrightarrow \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_s X_s - (\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_1 X_s) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1)X_2 + \cdots + (\lambda_s - \lambda_1)X_s = 0$$

Αφού $V_A(\lambda_i) \leq \mathbb{F}^{n\times 1}$ έχουμε πως $(\lambda_i - \lambda_1)X_i \in V_A(\lambda_i)$ και από επαγωγική υπόθεση έχουμε $(\lambda_i - \lambda_1)X_i = 0,\ i = 2, 3, \cdots, s$. Αφού $i \neq 1$ και οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, τότε $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$, άρα $X_i = 0$ για $i = 2, 3, \cdots, s$ άρα από 5.2 ισχύει ότι $X_1 = 0 \Leftrightarrow X_i = 0$, για κάθε $i = 1, 2, \cdots, s$. □

Πόρισμα 5.1.1. Ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα A που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη. Έστω A πίνακας, $X_1, \cdots, X_s$ ιδιοδιανύσματά του με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, όπου $\lambda_i \neq \lambda_j$, για κάθε $i, j \in \{1, 2, \cdots s\}$ με $i \neq j$.Έστω $m_1 X_1 + \cdots + m_s X_s = 0$ όπου $m_i \in \mathbb{F}, i \in \{1, 2, \cdots, s\}$. Αφού $V_A(\lambda_i) \leq \mathbb{F}^{n\times 1}$ και από Πρόταση 5.1.1 έπεται ότι $m_i X_i = 0$.Άρα $m_i = 0$, αφού $X_i \neq 0$ ως ιδιοδιάνυσμα του A. □

Ορισμός 5.1.2. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (ή $\mathbb{C}^{n\times n}$) και λ_i ιδιοτιμή του A.

(i) Ο μέγιστος αριθμός d_i των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i, δηλαδή $d_i := \dim V_A(\lambda_i)$, ονομάζεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της λ_i.

(ii) Η πολλαπλότητα τ_i της ιδιοτιμής λ_i ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(x)$ ονομάζεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της λ_i.

Παρατήρηση 5.1.1. Αποδεικνύεται ότι αν λ_i ιδιοτιμή ενός πίνακα A, τότε ισχύει ότι $d_i \leq \tau_i$.

Ορισμός 5.1.3. Ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (ή $\mathbb{C}^{n\times n}$) λέγεται **απλής δομής** αν και μόνο αν για κάθε ιδιοτιμή λ_i του A ισχύει ότι $d_i = \tau_i$. Αν υπάρχει ιδιοτιμή λ_j του A τέτοια ώστε $d_j < \tau_j$ τότε ο πίνακας A λέγεται **μη απλής δομής**.

Ασκήσεις

5.1. a. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4} \quad \text{και} \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 1}.$$

Είναι το X ιδιοδιάνυσμα του A; Είναι το 6 ιδιοτιμή του A ;

b. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

5.2. Βρείτε τα ιδιοδιανύσματα του $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ στις περιπτώσεις :

a. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

b. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

5.3. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων και εξετάστε αν είναι απλής δομής.

a. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

b. $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

5.2 Γραμμικά Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

Σημειώνουμε ότι αν $A(t) = (a_{ij}(t))$ πίνακας με στοιχεία παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο t_0 ορίζουμε την *παράγωγο* του A στο t_0 και συμβολίζουμε με $A'(t_0)$, τον πίνακα

$$A'(t) = \left(a'_{ij}(t_0)\right).$$

Για παράδειγμα αν $A(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & t^2 \\ 2 & \sin t \end{bmatrix}$ για $t \in \mathbb{R}$, τότε έχουμε ότι $A'(t) = \begin{bmatrix} 3e^{3t} & 2t \\ 0 & \cos t \end{bmatrix}$.

Ορισμός 5.2.1. Σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης της γενικής μορφής :

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ y_2' &= f_2(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{aligned}$$

όπου y_i είναι οι άγνωστες συναρτήσεις του t και οι f_i ορίζονται σε ένα τόπο $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Θέτοντας,

$$\underline{y(t)} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ f_2(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{bmatrix}$$

το σύστημα παίρνει τη μορφή: $x'(t) = f(t, x)$, που αντιστοιχεί σε μια διανυσματική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

Θεώρημα 5.2.1. Έστω ο πίνακας $A(t) = (a_{ij}(t)),\ 1 \leq i, j \leq n$ και η διανυσμάτική συνάρτηση $\underline{b(t)} = \left[b_1(t), b_2(t), \cdots, b_n(t)]^T\right]$ είναι συνεχείς στο ανοικτό διάστημα $I = (a, b)$ και $t_0 \in I$.Τότε, το $\overline{\text{Π.Α.Τ.}}$:

$$\underline{y'(t)} = A(t)\underline{y(t)} + \underline{b(t)},\ \underline{y(t_0)} = \underline{y_0}$$

έχει μοναδική λύση στο διάστημα I.

Ο πίνακας $A(t)$ λέγεται **πίνακας συντελεστών** και $\underline{b(t)}$ **μη ομογενής όρος** του συστήματος.

5.3 Γραμμικά Ομογενή Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

Όπως παραπάνω αν $\underline{b(t)} = 0$ για κάθε $t \in I$, τότε το σύστημα λέγεται **ομογενές** και έχει τη μορφή

$$\underline{y'(t)} = A(t)\underline{y(t)} \tag{5.5}$$

όπου έχουμε ότι $\underline{y(t)} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$ και $A = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$.

Μέθοδος Απαλοιφής

Σε περιπτώσεις επίλυσης γραμμικών συστημάτων με σταθερούς συντελεστές 2 ή 3 εξισώσεων η μέθοδος απαλοιφής προσφέρει μια απλή και σαφή διαδικασία επίλυσης η οποία δεν απαιτεί σύνθετες θεωρίες και τεχνικές.

Παράδειγμα 5.3.1. Να λυθεί το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = 4y_1(t) + y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

όπου $y_1, y_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Λύση. Παραγωγίζοντας την 1η σχέση έχουμε ότι

$$y_1'' = y_1' + y_2' \Leftrightarrow y_1'' - y_1 = y_2' = 4y_1 + y_2 = 4y_1 + y_1' - y_1 \Leftrightarrow y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = 0.$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $y_1(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{-t}$ και $y_2(t) = 2c_1e^{3t} - 2c_2e^{-t}$ με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, η γενική λύση έχει τη μορφή

$$\underline{y(t)} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^{3t} + c_2e^{-t} \\ 2c_1e^{3t} - 2c_2e^{-t} \end{bmatrix} = c_1e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

Θεώρημα 5.3.1. Αν $\underline{y^{(1)}}(t), \underline{y^{(2)}}(t), \cdots, \underline{y^{(n)}}(t)$ είναι n λύσεις του 5.5, τότε ο γραμμικός συνδυασμός

$$c_1\underline{y^{(1)}}(t) + \cdots + c_n\underline{y^{(n)}}(t)$$

είναι επίσης λύση του 5.5 για $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Δείξτε ότι ο χώρος λύσεων του συστήματος 5.5 είναι διανυσματικός χώρος. □

Αν $\underline{y^{(1)}}(t), \underline{y^{(2)}}(t), \cdots, \underline{y^{(n)}}(t)$ είναι n λύσεις του 5.5, θεωρούμε τον πίνακα

$$X(t) = \left(\underline{y^{(1)}}(t), \underline{y^{(2)}}(t), \cdots, \underline{y^{(n)}}(t)\right).$$

Έτσι είναι σαφές ότι οι λύσεις $\underline{y^{(1)}}(t), \underline{y^{(2)}}(t), \cdots, \underline{y^{(n)}}(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες για κάθε $t \in I$ αν και μόνο αν οι στήλες του $X(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες για κάθε $t \in I$ αν και μόνο αν $\det X(t) \neq 0$, για κάθε $t \in I$. Αν οι λύσεις $\underline{y^{(1)}}(t), \underline{y^{(2)}}(t), \cdots, \underline{y^{(n)}}(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ο πίνακας $X(t)$ καλείται **θεμελιώδης πίνακας** του 5.5.

Παράδειγμα 5.3.2. Αν αναχθούμε στο Παράδειγμα 5.3.1 έχουμε ότι οι λύσεις $y^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{bmatrix}$, $y^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες για κάθε $t \in \mathbb{R}$, αφού $\det \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{bmatrix} = -4e^{2t} \neq 0$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 5.3.1. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς, η ορίζουσα $\det[X(t)]$ συμβολίζεται με $W_{\underline{y^{(1)}}(t),\underline{y^{(2)}}(t),\ldots,\underline{y^{(n)}}(t)}(t)$ και λέγεται **ορίζουσα Wronski** των λύσεων $\underline{y^{(1)}}(t), \underline{y^{(2)}}(t), \ldots, \underline{y^{(n)}}(t)$.

Θεώρημα 5.3.2. Ο χώρος λύσεων του συστήμα 5.5 είναι διανυσματικός χώρος διάστασης n. Δηλαδή, αν οι διανυσματικές συναρτήσεις $\underline{y^{(1)}}(t), \underline{y^{(2)}}(t), \ldots, \underline{y^{(n)}}(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του 5.5 για κάθε $t \in I$, τότε κάθε λύση $\underline{y(t)}$ του συστήματος μπορεί να εκφραστεί ως

$$\underline{y(t)} = c_1\underline{y^{(1)}}(t) + c_2\underline{y^{(2)}}(t) + \cdots + c_n\underline{y^{(n)}}(t)$$

με μοναδικό τρόπο.

Υπενθυμίζουμε ότι αν A πίνακας της μορφής $A = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$, τότε ορίζουμε ως **ίχνος** (trace) του A το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του, δηλαδή $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Θεώρημα 5.3.3 (Τύπος του Abel)**.** Αν $\underline{y^{(1)}}(t), \underline{y^{(2)}}(t), \ldots, \underline{y^{(n)}}(t)$ λύσεις του 5.5, για κάποιο t_0 ισχύει ότι

$$\boxed{W_{\underline{y^{(1)}}(t),\underline{y^{(2)}}(t),\ldots,\underline{y^{(n)}}(t)}(t) = W_{\underline{y^{(1)}}(t),\underline{y^{(2)}}(t),\ldots,\underline{y^{(n)}}(t)}(t_0) \exp\left[\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}\left(A(x)\right) dx\right].}$$

Ασκήσεις

5.4. Να λυθεί με τη μέθοδο της απαλοιφής το σύστημα

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 - x_2 \end{cases}.$$

5.5. Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$X(t) = \begin{bmatrix} 2 & \log t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix},\ t > 0,$$

είναι θεμελιώδης πίνακας του συστήματος

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix} y$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί η λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $y(1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5.4 Πίνακες απλής δομής

Θεωρούμε ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι απλής δομής, και υποθέτουμε ότι έχει ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ όπου αντιστοιχούν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $v_1, \dots, v_n$ αντίστοιχα. Αναζητούμε λύσεις της της μορφής $\underline{y(t)} = e^{\lambda t}v$, όπου έχουμε ότι

$$\underline{y'(t)} = A\underline{y(t)} \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t}v = Ae^{\lambda t}v \Leftrightarrow Av = \lambda v.$$

Συνεπώς $\underline{y(t)}$ είναι λύση της 5.5 αν και μόνο αν v είναι ιδιοδιάνυσμα του A με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ. Συνεπώς, έχουμε ότι $\underline{y^{(1)}(t)} = e^{\lambda_1 t}v_1, \dots, \underline{y^{(n)}(t)} = e^{\lambda_n t}v_n$ είναι λύσεις της 5.5. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι παραπάνω λύσεις έχουν ορίζουσα Wronksi

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t}v_1, & e^{\lambda_2 t}v_2, & \cdots, & e^{\lambda_n t}v_n \end{vmatrix}$$

όπου για $t = 0$ έχουμε ότι $W(0) = \begin{vmatrix} v_1, & v_2, & \cdots & v_n \end{vmatrix} \neq 0$, αφού $v_1, \dots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Από τον τύπο του Abel έχουμε ότι $W(t) \neq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, συνεπώς οι παραπάνω λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Από το Θεώρημα 5.3.2 έχουμε ότι η γενική λύση της 5.5 είναι της μορφής

$$\boxed{\underline{y(t)} = c_1e^{\lambda_1 t}v_1 + c_2e^{\lambda_2 t}v_2 + \ldots + c_ne^{\lambda_n t}v_n, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.}$$

Παράδειγμα 5.4.1. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$\underline{y'(t)} = A\underline{y(t)}, \; A = \begin{bmatrix} -11 & 16 \\ -8 & 13 \end{bmatrix}, \quad \underline{y(0)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -11-\lambda & 16 \\ -8 & 13-\lambda \end{vmatrix} = x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -3 \text{ και } \lambda_2 = 5.$$

Συνεπώς, έχουμε ότι οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = -3$ και $\lambda_2 = 5$, όπου έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα 1, έτσι είναι σαφές ότι ο A είναι απλής δομής στο $\mathbb{R}$.

Αναζητούμε βάση για κάθε ιδιόχωρο του A. Έτσι, έχουμε ότι

- Για $\lambda_1 = -3$ για την εύρεση των ιδιοδιανυσμάτων για $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$(A + 3I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -8 & 16 \\ -8 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -8x_1 + 16x_2 = 0 \\ -8x_1 + 16x_2 = 0 \end{cases}$$

Έτσι, έχουμε ότι $x_1 = 2x_2$ και προκύπτει ότι

$$V_A(-3) = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 1} \mid (A+3I)X = 0\} = \left\{X = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \mid x_2 \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Έτσι, έχουμε ότι $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή -3.

- Για $\lambda_1 = 5$ για την εύρεση των ιδιοδιανυσμάτων για $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$(A+3I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -8 & 16 \\ -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -16x_1 + 16x_2 = 0 \\ -8x_1 + 8x_2 = 0 \end{cases}$$

Έτσι, έχουμε ότι $x_1 = x_2$ και προκύπτει ότι

$$V_A(5) = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 1} \mid (A-5I)X = 0\} = \left\{X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \mid x_2 \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Έτσι, έχουμε ότι $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή 5.

Από το Πόρισμα 5.1.1 έχουμε ότι v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφού αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, συνεπώς η γενική λύση του συστήματος είναι η

$$\underline{y(t)} = c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Για $t = 0$ έχουμε ότι

$$\underline{y(0)} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c_1 + c_2 = 4 \\ c_1 + c_2 = 3 \end{cases} .$$

Επομένως έχουμε ότι $c_1 = 1$ και $c_2 = 2$ και η λύση του Π.Α.Τ. είναι η

$$\underline{y(t)} = e^{-3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

■

Παράδειγμα 5.4.2. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\underline{y'(t)} = A\underline{y(t)}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

συνεπώς οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 1 και η $\lambda_2 = -2$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 2. Αναζητούμε βάση για κάθε ιδιόχωρο του A. Έτσι, έχουμε ότι

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ αν $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ αναγόμαστε στην λύση του συστήματος

$$(A-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η τρίτη εξίσωση είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο πρώτων εξισώσεων, συνεπώς λύνουμε το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων όπου έχουμε ότι

$$\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = z \text{ και } y = z \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι είναι σαφές ότι $V_A(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ και $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$ αν $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ αναγόμαστε στην λύση του συστήματος

$$(A+2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η δεύτερη και τρίτη εξίσωση είναι ίδιες με την πρώτη εξίσωση, συνεπώς λύνουμε την πρώτη εξίσωση, όπου έχουμε ότι

$$x+y+z=0 \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι είναι σαφές ότι $V_A(-2) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ και $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (δείξτε γιατί) ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή -2. Αφού $d_2 = \tau_2$

συμπεραίνουμε ότι ο A είναι απλής δομής, συνεπώς η γενική λύση είναι της μορφής

$$x(t) = c_1e^t \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + c_2e^{-2t} \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + c_3e^{-2t} \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

■

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα θεωρούμε πίνακα $\mathbb{R}^{n\times n}$, όπου το $\chi_A(\lambda)$ έχει μιγαδικές ρίζες της μορφής $\lambda = \sigma + i\omega,\ \omega \neq 0$ και ο A είναι απλής δομής στο $\mathbb{C}$. Αν $v = y + iz$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ, τότε η μιγαδική συνάρτηση

$$x(t) = e^{\lambda t}v = e^{(\sigma+i\omega)t}[y + zi].$$

είναι λύση της 5.5 και θα δείξουμε ότι προκύπτει ένα ζεύγος γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων. Από τη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις $\left(e^{\lambda t}\right)' = \lambda e^{\lambda t},\ \lambda \in \mathbb{C}$ και την εξίσωση του Euler

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t).$$

Θα αναπτύξουμε αρχικά μια μέθοδο ταυτόχρονης εύρεσης του πραγματικού και του φανταστικού μέρους του μιγαδικού ιδιοδιανύσματος $v = y+iz$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = \sigma+i\omega$. Η σχέση $Av = \lambda v$ γράφεται

$$A(y + zi) = (\sigma + \omega i)(y + zi),$$

ή ισοδύναμα

$$Ax + iAz = (\sigma y - \omega z) + i(\omega y + \sigma z).$$

Κατα συνέπεια θα έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{cases} Ay = \sigma y - \omega z \\ Az = \omega y + \sigma z \end{cases}$$

οι οποίες ενοποιούνται στην ακόλουθη σχέση

$$\begin{bmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma I_n & -\omega I_n \\ \omega I_n & \sigma I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} A - \sigma I_n & \omega I_n \\ -\omega I_n & A - \sigma I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = 0.$$

Από τη λύση αυτού του γραμμικού ομογενούς συστήματος προκύπτει η ταυτόχρονη εύρεση των y και z και συνεπώς του v.

Τα διανύσματα y και z είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι αν ήταν γραμμικά εξαρτημένα, τότε θα υπήρχε $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ώστε $z = \mu y$. Έτσι, αντικαθιστώντας στην αρχική σχέση έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & A\left(y + \mu i y\right) = \left(\sigma + i\omega\right)\left(y + \mu i y\right) \\ \Leftrightarrow\quad & \left(1 + \mu i\right) A y = \left(1 + \mu i\right)\left(\sigma + i\omega\right) y \\ \Leftrightarrow\quad & A y = \left(\sigma + i\omega\right) y \end{aligned}$$

αφού $1-\mu i \neq 0$. Όμως, το y είναι πραγματικό διάνυσμα συνεπώς, το αριστερό μέλος είναι γνήσια πραγματικό ενώ το δεξί μέλος είναι γνήσια φανταστικό, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Υπενθύμιση 5.4.1. Αν $\lambda = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$ ορίζουμε ως **συζυγή** του λ, και συμβολίζουμε $\overline{\lambda}$, τον αριθμό $\overline{\lambda} = \sigma - \omega i$. Γενικότερα αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $A = (a_{ij})$ ορίζουμε ως **συζυγή πίνακα** του A την πίνακα $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$.

Παρατήρηση 5.4.1. Αν $\lambda = \sigma + \omega i$ ιδιοτιμή του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $\omega \neq 0$, τότε αν v αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A έχουμε ότι

$$Av = \lambda v \Rightarrow \overline{Av} = \overline{\lambda v} \Rightarrow A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v},$$

συνεπώς $\overline{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A και $\overline{v}$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $\overline{\lambda}$.

Παράδειγμα 5.4.3. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντιστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Απόδειξη. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

άρα οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 1 + i$ και $\lambda_2 = 1 - i$.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1 + i$ αν $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$(A - (i+1)I)\,X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -ix_1 - y = 0 \\ x - iy = 0 \end{cases}$$

  Έτσι, έχουμε ότι $x = iy$ και συμπεραίνουμε ότι

$$V_A(1+i) = \left\langle \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Αφού $v = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $1+i$, τότε από την παραπάνω Παρατήρηση, έχουμε ότι $u = \overline{v} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή του A και αφού $\dim V_A(1-i) = 1$ (γεωμετρική πολλαπλότητα), τότε είναι σαφές ότι

$$V_A(1-i) = \left\langle \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

□

Θεώρημα 5.4.1. Αν η μιγαδική συνάρτηση $\underline{y(t)} = \underline{\varphi_1(t)} + i\underline{\varphi_2(t)}$ είναι λύση της διανυσματικής διαφορικής εξίσωσης $\underline{y'(t)} = A\underline{y(t)}$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε οι πραγματικές συναρτήσεις $\underline{\varphi_1(t)}$ και $\underline{\varphi_2(t)}$ είναι επίσης λύσεις της διαφορικής εξίσωσης και μάλιστα γραμμικά ανεξάρτητες.

Απόδειξη. Χρησιμοποιήστε την σχέση $\underline{y'(t)} = A\underline{y(t)}$ και εξισώστε πραγματικά και φανταστικά μέρη. □

Πόρισμα 5.4.1. Αν στην ιδιοτιμή $\lambda = \sigma + i\omega$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\underline{v} = \underline{y} + i\underline{z}$, τότε $\underline{y(t)} = e^{\lambda t}v$, λύση της εξίσωσης $\underline{y'(t)} = A\underline{y(t)}$ θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} & \underline{y(t)} = e^{(\sigma+i\omega)t}(y+iz) \\ = \quad & e^{\sigma t}\left[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right] \\ = \quad & e^{\sigma t}\left[(\cos(\omega t)y - \sin(\omega t)z) + i\left(\sin(\omega t)y + \cos(\omega t)z\right)\right] \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια οι δύο πραγματικές λύσεις που προκύπτουν είναι οι

$$\varphi_1(t) = \mathrm{Re}(y(t)) = e^{\sigma t}\left[\cos(\omega t)y - \sin(\omega t)z\right]$$

και

$$\varphi_2(t) = \mathrm{Im}(y(t)) = e^{\sigma t}\left[\sin(\omega t)y + \cos(\omega t)z\right].$$

Ασκήσεις

5.6. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$\underline{y'(t)} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \underline{y(t)}, \quad \underline{y(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

5.7. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$\underline{y'(t)} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} \underline{y(t)}, \quad \underline{y(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

5.8. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$\underline{y'(t)} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \underline{y(t)}, \quad \underline{y(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

5.9. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$\underline{y'(t)} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{y(t)}, \quad \underline{y(0)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5.10. Έστω ότι ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει πραγματική ιδιοτιμή $\lambda < 0$. Τότε η εξίσωση $\underline{y}' = A\underline{y}$ έχει τουλάχιστον μια μη μηδενική λύση $\underline{y(t)}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{t\to\infty} \underline{y(t)} = 0.$$

5.11. Θεωρούμε το σύστημα

$$\underline{y'(t)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \underline{y(t)}.$$

(i) Να βρεθεί η γενική λύση.

(ii) Να προσδιορισθεί το σύνολο των αρχικών συνθηκών έτσι ώστε οι αντίστοιχες λύσεις να τείνουν στο 0 καθώς το $t \to \infty$.

5.12. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\underline{y'(t)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{y(t)}.$$

5.13. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$\underline{y'(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{y(t)}, \quad \underline{y(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5.5 Πίνακες Μη Απλής Δομής

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\underline{y'(t)} = A\underline{y(t)} \tag{5.6}$$

με $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ μη απλής δομής. Σκοπός είναι να περιγράψουμε τον τρόπο επίλυσης του συστήματος 5.6 στη περίπτωση που ο πίνακας A είναι μη απλής δομής. Θα αναφερθούμε σε μεμονωμένες περιπτώσεις και θα καταλήξουμε σε μια περιγραφή μιας γενικής μεθόδου και ελπίζουμε ότι δεν θα μπερδέψουμε τον αναγνώστη. Ο λόγος που γίνεται αυτό είναι για να αποφύγουμε την εκτενή αναφορά της γενικής θεωρίας των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων και της μορφής Jordan ενός πίνακα.

Θεωρούμε λοιπόν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή του A.

1. Υποθέτουμε ότι η αλγεβρική πολλαπλότητα της λ είναι 2 και η γεωμετρική της πολλαπλότητα είναι ίση με 1. Τότε αν v ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ έχουμε ότι

$\underline{y^{(1)}(t)} = e^{\lambda t}v \neq 0$ είναι μια λύση του συστήματος. Αφού ο A είναι μη απλής δομής δεν μπορούμε να αναχθούμε στις μεθόδους της προηγούμενης παραγράφου και σκεπτόμενοι τις εξισώσεις 2ης τάξης αναζητούμε μια δεύτερη λύση της μορφής $\underline{y(t)} = e^{\lambda t}tv$. Όμως παρατηρούμε ότι στη περίπτωση αυτή ισχύει

$$\underline{y'(t)} = A\underline{y(t)} \Leftrightarrow \left(e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda}\right) v = \lambda e^{\lambda t} t v \Leftrightarrow v = 0 \ ,$$

όπου καταλήγουμε σε άτοπο. Έτσι αναζητούμε λύση της μορφής $\underline{y^{(2)}(t)} = e^{\lambda t}\left(tv + u\right)$ με $u \in \mathbb{R}^{n\times n}$ όπου προκύπτει ότι

$$\underline{y^{(2)}(t)}' = A\underline{y^{(2)}(t)} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\, u = v \ ,$$

και έτσι για να προσδιορίσουμε την λύση αναγόμαστε στην επίλυση του τελευταίου συστήματος για την εύρεση του u.

Παράδειγμα 5.5.1. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\underline{y'(t)} = A\underline{y(t)}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Έχουμε ότι $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$. Άρα, το 2 είναι ιδιοτιμή του A με αλγεβρική πολλαπλότητας $\tau_2 = 2$. Αν $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 2 έχουμε ότι

$$(A - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = -x \Leftrightarrow X = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι είναι σαφές ότι $V_A(2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ επομένως η ιδιοτιμή 2 έχει γεωμετρική πολλαπλότητα ίση με $d_2 = 1$. Συνεπώς, γνωρίζουμε ότι

$$\underline{y^{(1)}(t)} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

είναι μια λύση του συστήματος και αναζητούμε μια δεύτερη, γραμμικά ανεξάρτητη της $\underline{y^{(1)}(t)}$ λύση της μορφής

$$\underline{y^{(2)}(t)} = e^{2t}\left(t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + u\right) \ ,$$

όπου αν $u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ αναγόμαστε στην επίλυση του συστήματος

$$\begin{aligned} (A - 2I)u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad b = -1 - a \Leftrightarrow u &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Συνεπώς μια επιλογή για το u είναι η $u = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, επομένως έχουμε ότι

$$\underline{y}^{(2)}(t) = e^{2t}\left(t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

είναι λύση του συστήματος και μάλιστα γραμμικά ανεξάρτητη της $\underline{y^{(1)}(t)}$ (γιατί ;). Έτσι η γενική λύση του συστήματος είναι η

$$\underline{y(t)} = c_1 e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t}\left(t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

■

2. Θεωρούμε ότι η αλγεβρική πολλαπλότητα της λ είναι 3 και η γεωμετρική ίση με 2. Συνεπώς μπορούμε να βρούμε v_1 και v_2 γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ και γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του 5.6,

$$\underline{y^{(1)}(t)} = e^{\lambda t} v_1 \quad \text{και} \quad \underline{y^{(2)}(t)} = e^{\lambda t} v_2$$

Όπως στο Παράδειγμα 5.5.1 αναζητούμε τρίτη λύση [1] της μορφής

$$\underline{y^{(3)}(t)} = e^{\lambda t}\left(tv + u\right) ,$$

όπου v ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, δηλαδή είναι της μορφής $v = c_1 v_1 + c_2 v_2$. Έτσι, όμοια με την πρώτη περίπτωση αναγόμαστε στην εύρεση του u που προκύπτει από την επίλυση του συστήματος

$$(A - \lambda I)u = v.$$

Παράδειγμα 5.5.2. Να λυθεί το σύστημα

$$\underline{y'(t)} = A\underline{y(t)}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -9 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Έχουμε ότι $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^3$, άρα το 1 είναι ιδιοτιμή του A με αλγεβρική πολλαπλότητα ίση με $\tau_1 = 3$. Αν $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή 1, έχουμε ότι

$$(A - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad x + 3y = 0 \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -3y \\ y \\ z \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[1] Στη περίπτωση πίνακα μη απλής δομής αναζητούμε $\tau_\lambda - d_\lambda$ επιπλέον λύσεις για την εύρεση της γενικής λύσης.

Έτσι έχουμε ότι $V_A(1) = \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, δηλαδή $v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 1. Έτσι αφού $d_1 = 2 < \tau_1 = 3$ ο A δεν είναι απλή δομής και αναζητούμε τρίτη λύση του συστήματος της μορφής

$$\underline{y^{(3)}(t)} = e^t\,(tv + u)\ \ ,$$

όπου $v = \lambda v_1 + \mu v_2$ ιδιοδιάνυσμα του A και $u = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, όπου η εύρεση του προκύπτει από την επίλυση του συστήματος

$$(A - I)u = v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\lambda \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \xRightarrow{\lambda=1,\ \mu=1}$$

$$a + 3b = 1 \Rightarrow u = \begin{bmatrix} 1-3b \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

με τα $b, c \in \mathbb{R}$. Συνεπώς μια επιλογή για το u είναι η $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και επομένως μια τρίτη λύση του συστήματος, γραμμικώς ανεξάρτητη από τις δύο συνήθεις λύσεις, είναι

$$\underline{y^{(3)}(t)} = e^t \left(t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

και η γενική λύση του συστήματος είναι η

$$\underline{y(t)} = c_1 e^t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^t \left(t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right),\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

■

3. Υποθέτουμε τώρα ότι η αλγεβρική πολλαπλότητα της λ είναι ίση με 3 και η γεωμετρική ίση με 1. Έτσι, αν v ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ έχουμε ότι μια λύση του συστήματος είναι η $\underline{y^{(1)}(t)}(t) = e^{\lambda t} v$ και αναζητούμε άλλες δύο λύσεις, όπου μαζί με την $\underline{y^{(1)}(t)}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητες ανά δυό.

   Όπως προηγούμενως μια δεύτερη λύση του συστήματος θα είναι η

$$\underline{y^{(2)}(t)} = e^{\lambda t}\,(tv + u)\ \ ,$$

   όπου u προκύπτει από την επίλυση του συστήματος $(A - \lambda I)u = v$. Τώρα, για την εύρεση μιας τρίτης λύσης σκεπτόμενοι τις μεθόδους του 2ου Κεφαλαίου αναζητούμε λύση της μορφής

$$\underline{y^{(3)}(t)} = e^{\lambda} \left(\frac{t^2}{2!} v + tu + w \right).$$

και εφαρμόζοντάς τη στο 5.6 έχουμε ότι $\underline{y^{(3)}(t)}$ είναι λύση του συστήματος αν και μόνο αν

$$(A-\lambda I)w = u.$$

Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι οι λύσεις $\underline{y^{(1)}(t)}, \underline{y^{(2)}(t)}, \underline{y^{(3)}(t)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Γενική Μέθοδος

Όπως πριν θεωρούμε ότι $\dim(V_A(\lambda)) = 1$ και $\tau_\lambda = s$. Για την επίλυση του συστήματος ακολουθούμε τα εξής βήματα.

1. Βρίσκουμε v_1 ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή του A, δηλαδή μια λύση του συστήματος είναι η $\underline{y^{(1)}(t)} = e^{\lambda t} v_1$.
2. Μια δεύτερη λύση του συστήματος είναι η $\underline{y^{(2)}(t)} = e^{\lambda t}(tv_1 + v_2)$, όπου η εύρεση του v_2 ανάγεται στην επίλυση του συστήματος $(A-\lambda I)v_2 = v_1$.
3. Μια τρίτη λύση του συστήματος είναι η $\underline{y^{(3)}(t)} = e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2!}v_1 + tv_2 + v_3\right)$, όπου η εύρεση του v_3 ανάγεται στην επίλυση του συστήματος $(A-\lambda I)v_3 = v_2$.
4. Αναδρομικά η s - λύση του συστήματος θα είναι της μορφής

$$\underline{y^{(s)}(t)} = e^{\lambda t}\left(\frac{t^s}{s!}v_1 + \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} + \cdots + tv_{s-1} + v_s\right) \ ,$$

όπου η εύρεση του v_s ανάγεται στην επίλυση του συστήματος

$$(A-\lambda I)v_s = v_{s-1}.$$

Στην περίπτωση που $\dim(V_A(\lambda)) = \ell > 1$ και $\tau_\lambda = s > \ell$ αναζητούμε $s-\ell$ λύσεις (διαφορετικές των συνήθων), όπου προκύπτουν όπως παραπάνω με την διαφορά ότι v_1 μπορεί να είναι ένα οποιοδήποτε ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ αρκεί το αντίστοιχο σύστημα να έχει λύση, δηλαδή μπορούμε να επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε γραμμικά συνδυασμό της βάση του $V_A(\lambda)$ ώστε το ζητούμενο σύστημα να έχει λύση. (Βλέπε Παράδειγμα 5.5.2)

Ορισμός 5.5.1. Τα v_j για $j = 1, \cdots, s$, που προκύπτουν από την παραπάνω διαδικασία λέγονται **γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A τάξης** j , αντίστοιχα της ιδιοτιμής λ.

Ασκήσεις

5.14. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\underline{y'(t)} = A\underline{y(t)}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}.$$

5.15. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\underline{y}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \underline{y}(t).$$

5.16. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\underline{y}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \underline{y}(t).$$

5.17. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\underline{y}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{y}(t).$$

5.6 Μη ομογενή γραμμικά συστήματα

Θεωρούμε το μη ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\underline{y}'(t) = A(t)\underline{y}(t) + \underline{b}(t) \tag{5.7}$$

όπου ο $n \times n$ πίνακας συντελεστών $A(t)$ και η διανυσματική συνάρτηση $\underline{b}(t)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $I = (a, b)$. Αν $\underline{y}^{(1)}(t), \dots, \underline{y}^{(n)}(t)$ είναι n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς, όπως και στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις μπορούμε να εκφράσουμε τη γενική λύση του συστήματος 5.7 ως

$$\underline{y}(t) = c_1\underline{y}^{(1)}(t) + \dots + c_n\underline{y}^{(n)}(t) + \underline{y}_{\varepsilon\iota\delta}(t).$$

ή

$$\underline{y}(t) = X(t) \cdot c + \underline{y}_{\varepsilon\iota\delta}(t).$$

όπου $X(t)$ θεμελιώδης πίνακας του ομογενούς συστήματος και $c \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ με στοιχεία αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Για τον υπολογισμό της ειδικής λύσης θα προσπαθήσουμε να μιμηθούμε την μέθοδο μεταβολής παραμέτρων (μέθοδος Lagrange) όπως στο Κεφάλαιο 3.

Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων.

Αν $X(t)$ θεμελιώδης πίνακας του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος του 5.7 αναζητούμε ειδική λύση της μορφής $\underline{y}_{\varepsilon\iota\delta}(t) = X(t)u(t)$, όπου $u(t)$ διανυσματική συνάρτηση. Έτσι έχουμε διαδοχικά ότι

$$\underline{y}'_{\varepsilon\iota\delta}(t) = A(t)\underline{y}_{\varepsilon\iota\delta}(t) + b(t) \Leftrightarrow X'(t)u(t) + X(t)u'(t) = A(t)X(t)u(t) + b(t) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X'(t)u(t) + X(t)u'(t) = X'(t)u(t) + b(t) \Leftrightarrow X(t)u'(t) = b(t)$$

Έχουμε δείξει ότι για κάθε $t \in I$ ο πίνακας $X(t)$ είναι αντιστρέψιμος συνεπώς έχουμε ότι

$$u'(t) = X^{-1}(t)b(t) \Rightarrow u(t) = \int X^{-1}(t)b(t) + c.$$

Υπενθύμιση 5.6.1. Αν $A(t) = (a_{ij}(t))$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα I, τότε ορίζουμε ώς το *ολοκλήρωμα* του A στο I τον πίνακα

$$\int A(t)dt = \left(\int a_{ij}(t)dt\right).$$

Δείξαμε λοιπόν ότι η γενική λύση του συστήματος έχει τη μορφή

$$\underline{y(t)} = X(t) \cdot c + X(t) \int X^{-1}(t)b(t)dt \tag{5.8}$$

ή αν $t_0 \in I$ έχουμε ότι

$$\underline{y(t)} = X(t) \cdot c + X(t) \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)b(s)ds.$$

Παράδειγμα 5.6.1. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\underline{y'(t)} = A\underline{y(t)} + b(t), \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \ b(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}.$$

Απόδειξη. Αρχικά πρέπει να λύσουμε το αντίστοιχο ομογενές σύστημα. Έχουμε ότι $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$, δηλαδή οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$ οι ιδιοτιμές του A που είναι απλής δομής και $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1, λ_2 αντίστοιχα (δείξτε γιατί). Επομένως οι συναρτήσεις $\underline{y^{(1)}(t)} = e^t v_1$ και $\underline{y^{(2)}(t)} = e^{-t} v_2$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος. Έτσι έχουμε ότι ο πίνακας

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{bmatrix}$$

είναι θεμελιώδης πίνακας του ομογενούς συστήματος. Ο αντίστροφος πίνακας του $X(t)$ είναι ο

$$X^{-1}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{bmatrix}$$

και ισχύει ότι

$$X^{-1}(t)b(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 - te^{-t} \\ -e^{2t} + te^t \end{bmatrix} \Rightarrow \int X^{-1}(t)b(t)dt = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3t + (t+1)e^{-t} \\ -\frac{e^{2t}}{2} + (t-1)e^t \end{bmatrix} + c$$

$$\overset{c=0}{\Longrightarrow} \quad \underline{y_{\epsilon\iota\delta}(t)} = X(t) \int X^{-1}(t)b(t)dt = \begin{bmatrix} \frac{3te^t}{2} - \frac{e^t}{4} + t \\ \frac{3te^t}{2} - \frac{3e^t}{4} + 2t - 1 \end{bmatrix}$$

□

Ασκήσεις

5.18. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\underline{y'(t)} = A\underline{y(t)} + \underline{b(t)}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \ \underline{b(t)} = \begin{bmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{bmatrix}.$$

5.19. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\underline{y'(t)} = A\underline{y(t)} + \underline{b(t)}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \ \underline{b(t)} = \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \end{bmatrix}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

6.1 Ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μια διαφορετική μέθοδο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace.

Ο μετασχηματισμός Laplace ανήκει στην κατηγορία των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών. Οι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί χρησιμοποιούνται για να απαντήσουν στο ακόλουθο ερώτημα: πόσο πολύ μια δοσμένη συνάρτηση ''μοιάζει'' προς μια συγκεκριμένη συνάρτηση ;

Για παράδειγμα, αν $y(t)$ παριστάνει μια συνάρτηση ραδιοφωνικού κύματος, θα θέλαμε να τη συγκρίνουμε με τη συνάρτηση $\sin(\omega t)$, που είναι ημιτονοειδής συνάρτηση κύματος με συχνότητα $\frac{\omega}{2\pi}$. Συγκεκριμένα, για κάθε τιμή του ω θα θέλαμε να προσδιορίσουμε ένα αριθμό που να μας δείχνει πόσο πολύ η $y(t)$ μοιάζει με την $\sin(\omega t)$.

Ένας τρόπος για να επιτύχουμε αυτή τη σύγκριση είναι ο υπολογισμός του ολοκληρώματος

$$\int_{-\rho}^{\rho} y(t)\sin(\omega t)dt$$

για μεγάλες τιμές του ρ. Αν η $y(t)$ ταλαντώνεται με συχνότητα $\frac{\omega}{2\pi}$ και είναι θετική όταν η $\sin(\omega t)$ είναι θετική, τότε η τιμή του ολοκληρώματος είναι πολύ μεγάλη. Αν η $y(t)$ έχει άλλη συχνότητα, τότε τα πρόσημα των $y(t)$ και $\sin(\omega t)$ διαφέρουν σε μερικές τιμές του t, οπότε υπάρχουν απλοποιήσεις στο ολοκλήρωμα και η τιμή του είναι μικρότερη.

Για την χρήση αυτής της ιδέας στη επίλυση διαφορικών εξισώσεων είναι φυσικό να συγκρίνουμε την $y(t)$ με μια συνάρτηση που εμφανίζεται πολύ συχνά στις διαφορικές εξισώσεις, την εκθετική συνάρτηση.

Ορισμός 6.1.1. Ο **γενικευμένος γραμμικός ολοκληρωτικός μετασχηματισμός** $Y(s)$ μιας συνάρτησης $y(t)$ ορίζεται ως εξής :

$$Y(s) = \int_a^b y(t)k(s,t)dt, \tag{6.1}$$

όπου η συνάρτηση $k(s,t)$ που εξαρτάται από μια πρόσθετη παράμετρο s, ονομάζεται **πυρήνας του μετασχηματισμού**.

Η χρησιμότητα των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών και ειδικότερα του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει από το γεγονός ότι συνήθως η μετασχηματισμένη συνάρτηση $Y(s)$ έχει απλούστερες ιδιότητες από την αρχική $y(t)$.

Η βασική μεθοδολογία, λοιπόν, εγκείται στο να βρει κάποιος πρώτα την $Y(s)$ και μετά μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού να βρει την $y(t)$.

6.2 Μετασχηματισμός Laplace

Ορισμός 6.2.1. Έστω $f(t)$ μια πραγματική συνάρτηση μεταβλητής t, η οποία ορίζεται για $t \geq 0$. Ο **μετασχηματισμός Laplace** της f είναι η συνάρτηση $F(s)$, η οποία ορίζεται από την ισότητα

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{6.2}$$

για όλες τις τιμές του s, για τις οποίες το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει, δηλαδή όταν το όριο

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)dt$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο.

Στη συνέχεια παραθέτουμε παραδείγματα μετασχηματισμού Laplace στοιχειωδών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 6.2.1.

Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτηση $f(t) = c \neq 0$.

Λύση. Έχουμε ότι

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^\infty ce^{-st}dt = c\left(\lim_{A\to\infty} \frac{1-e^{-sA}}{s}\right) = \begin{cases} \frac{c}{s}, & s > 0 \\ \infty, & s \leq 0 \end{cases}.$$

Άρα, πρόκύπτει ότι

$$F(s) = \mathcal{L}\{c\} = \frac{c}{s},\ s > 0.$$

■

Παράδειγμα 6.2.2. Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτηση $f(t) = e^{at}$.

Λύση. Έχουμε ότι

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}dt = \lim_{A\to\infty}\frac{1-e^{-(s-a)A}}{s-a} = \begin{cases} \frac{1}{s-a}, & s > a \\ \infty, & s \leq a \end{cases}.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}, \qquad s > a.$$

■

Παράδειγμα 6.2.3. Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace την συναρτήσεων $\cos(at)$ και $\sin(at)$.

Λύση. Έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\left\{\cos(at)\right\} = \lim_{A\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-st}\cos(at)dt$$

και

$$\mathcal{L}\left\{\sin(at)\right\} = \lim_{A\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-st}\sin(at)dt.$$

Υπενθυμίζουμε την ταυτότητα του Euler

$$e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta).$$

Έτσι προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\left\{\cos(at)\right\} + i\mathcal{L}\left\{\sin(at)\right\} = \lim_{A\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-st}e^{iat}dt = \begin{cases} \dfrac{s+ia}{s^2+a^2}, & s > 0 \\ \\ \infty, & s \leq 0 \end{cases}.$$

Εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη της παραπάνω εξίσωσης έχουμε

$$\mathcal{L}\left\{\cos(at)\right\} = \frac{s}{s^2+a^2} \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\left\{\sin(at)\right\} = \frac{a}{s^2+a^2}.$$

■

Παράδειγμα 6.2.4. Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t) = t^a,\ a > -1$.

Λύση. Για $x > 0$ ορίζουμε την συνάρτηση

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη να δείξει ότι $\Gamma(1) = 1$ και $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, όπου προκύπτει ότι $\Gamma(n+1) = n!$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από τον ορισμό θα έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{t^a\} = \int_0^\infty e^{-st} t^a dt,$$

οπότε θέτοντας $u = st$ προκύπτει ότι $dt = \frac{du}{s}$ και αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{t^a\} = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^a du = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}},$$

για $s > 0$. Από τις παραπάνω σχέσεις για $n \in \mathbb{N}$ προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0.$$

■

Παράδειγμα 6.2.5. Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ k, & t = 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}.$$

Λύση. Η f είναι ασυνεχής στο 1. Αν $0 < \varepsilon < 1$ έχουμε ότι

$$\int_0^1 e^{-st} f(t) dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} e^{-st} dt = \begin{cases} \infty, & s \le 0 \\ \dfrac{1 - e^{-s}}{s}, & s > 0 \end{cases}$$

και

$$\int_1^\infty e^{-st} f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1+\varepsilon} e^{-st} \cdot 0 dt = 0.$$

Συνεπώς έχουμε ότι

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt =$$
$$= \int_0^1 e^{-st} f(t) dt + \int_1^\infty e^{-st} f(t) = \frac{1 - e^{-s}}{s},\ s > 0.$$

■

Ασκήσεις

6.1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace βρείτε το $\mathcal{L}\{e^{3t}\}$, αν υπάρχει. Αν ο μετασχηματισμός υπάρχει βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

6.2. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace βρείτε το $\mathcal{L}\{e^{-5t}\}$, αν υπάρχει. Αν ο μετασχηματισμός υπάρχει βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

6.3. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace βρείτε το $\mathcal{L}\{f(t)\}$, αν υπάρχει. Αν ο μετασχηματισμός υπάρχει βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t-1, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}.$$

6.3 Ύπαρξη μετασχηματισμού Laplace

Ορισμός 6.3.1. Μια πραγματική συνάρτηση f λέγεται **τμηματικά συνεχής** στο διάστημα $[0, A]$ αν

(α) υπάρχουν το πολύ πεπερασμένου πλήθους σημεία $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq A$, στα οποία η f είναι ασυνεχής,

(β) σε κάθε σημείο ασυνέχειας t_i τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή

$$\lim_{t \to t_i^-} f(t), \lim_{t \to t_i^+} f(t) \in \mathbb{R}.$$

Θα μελετήσουμε προσεκτικά τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μια συνάρτηση f έχει μετασχηματισμό Laplace.

Μια λεπτομερειακή και αυστηρή προσέγγιση αυτού του προβλήματος απαιτεί εξοικείωση με τη γενική θεωρία του γενικευμένου ολοκληρώματος. Είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό ότο το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(t)dt$$

υπάρχει αν η $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$. Συνεπώς αν η $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής για $t \geq 0$, τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^b e^{-st}dt$$

υπάρχει για κάθε $b > 0$.

Για την ύπαρξη του ορίου αυτού του ολοκληρώματος όταν $b \to \infty$, είναι αναγκαία κάποια συνθήκη που να περιορίζει το ρυθμό αύξησης της $f(t)$ καθώς το $t \to \infty$. Με κίνητρο αυτό δίνεται ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 6.3.2. Η συνάρτηση $f(t)$ ονομάζεται **εκθετικής τάξης** καθώς το $t \to \infty$, αν και μόνο αν υπάρχουν μη αρνητικές σταθερές M, c και T τέτοιες ώστε :

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, \text{ για κάθε } t \geq T.$$

Άρα μια συνάρτηση εκθετικής τάξης (όταν το $t \to \infty$) αυξάνεται όχι ταχύτερα από ένα σταθερό πολλαπλάσιο μιας εκθετικής συνάρτησης με γραμμικό εκθέτη.

Παράδειγμα 6.3.1. Κάθε f φραγμένη συνάρτηση είναι εκθετικής τάξης, αφού γνωρίζουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(t)| < M$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. $(c = 0)$

Παράδειγμα 6.3.2. Η συνάρτηση t^n είναι εκθετικής τάξης, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αφού γνωρίζουμε ότι $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$, άρα έχουμε ότι

$$\left|\frac{t^n}{n!}\right| \leq e^t \Rightarrow |t^n| \leq (n!)e^t, \qquad \forall t \geq 0.$$

Παράδειγμα 6.3.3. Η συνάρτηση e^{t^2} δεν είναι εκθετικής τάξης. Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι $\lim_{t\to\infty} \frac{e^{t^2}}{e^{at}} = \infty$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, και έτσι να συμπεράνει ότι e^{t^2} δεν είναι εκθετικής τάξης.

Θεώρημα 6.3.1 (Ύπαρξης)**.** Εαν η συνάρτηση f είναι τμηματικά συνεχής για $t \geq 0$ και εκθετικής τάξης καθώς το $t \to \infty$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ υπάρχει.

Απόδειξη. Αφού f είναι εκθετικής τάξης, υπάρχουν μη αρνητικές σταθερές M, c και T τέτοιες ώστε :

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, \text{ για κάθε } t \geq T.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt = \int_0^{T} e^{-st}f(t)dt + \int_T^{\infty} e^{-st}f(t)dt = I_1 + I_2.$$

Η ύπαρξη του I_1 εξασφαλίζεται από την τμηματική συνέχεια της f (βλέπε παραπάνω παρατήρηση). Αφού η f είναι εκθετικής τάξης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \left|\int_T^A e^{-st}f(t)dt\right| &\leq \int_T^A e^{-st}|f(t)|dt \leq M\int_T^A e^{-st}e^{ct} = \\ =M\int_T^A e^{-(s-c)t}dt &= -\frac{M}{s-c}\left[e^{-(s-c)A} - e^{-(s-c)T}\right] \to \left(\frac{M}{s-c}\right)e^{-(s-c)T} \end{aligned}$$

για $A \to \infty$ και $s > c$. Άρα, το I_2 σύγκλινει για $s > c$ και επομένως υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$. $\square$

Πόρισμα 6.3.1. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του προηγουμενου θεωρήματος και $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, για $s > c$, τότε έχουμε ότι $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

Απόδειξη. Το ζητούμενο είναι άμεσο από την τελευταία σχέση της προηγούμενης απόδειξης. □

Παρατήρηση 6.3.1. Οι συνθήκες του προηγούμενου θεώρήματος είναι ικανές αλλά όχι αναγκαίες για την ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace.

Παράδειγμα 6.3.4. Η συνάρτηση $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$ δεν είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, \infty)$ αλλά έχει μετασχηματισμό Laplace (δείξτε γιατί).

6.4 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Θεώρημα 6.4.1 (Γραμμικότητα)**.** Αν $a, b \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}(g(t)),$$

για όλα τα s για τα οποία υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $f(t)$ και $g(t)$.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\left[af(t) + bg(t)\right] dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st}\left[af(t) + bg(t)\right] dt \\
&= a\left(\lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)\right) dt + b\left(\lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} g(t)\right) dt \\
&= a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}(g(t))
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 6.4.1. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t) = 2e^{-3t} + 4\cos(2t) - 5\sin(3t)$.

Λύση. Έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(f(t)) = 2\mathcal{L}\{e^{-3t}\} + 4\mathcal{L}\{\cos(2t)\} - 5\mathcal{L}\{\sin(3t)\} = \frac{2}{s+3} + \frac{4s}{s^2+4} - \frac{15}{s^2+9}.$$

■

Θεώρημα 6.4.2. Όπως, παραπάνω αν $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ για $s > a$ και $c > 0$, τότε ισχύει

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right).$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι $\mathcal{L}\{f(ct)\} = \int_0^\infty e^{st} f(ct)dt$ και θέτοντας $\tau = ct$ έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \int_0^\infty e^{st} f(ct)dt = \frac{1}{c}\left[\int_0^\infty e^{-\left(\frac{s}{c}\right)\tau} f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$$

για $\frac{s}{c} > a$, δηλαδή για $s > ca$. □

Παράδειγμα 6.4.2. Επειδή ισχύει ότι $\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$ και $\mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{s}{s^2+1}$ εχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{s}{\left(\frac{s\omega}{\omega}\right)^2 + 1}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

και

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Θεώρημα 6.4.3. Αν $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ για $s > a$ και $c \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{L}\{e^{ct} f(t)\} = F(s - c), \quad \text{για } s > a + c.$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{e^{ct} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{ct} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t} f(t) = F(s - c)$$

για $s - c > a$, δηλαδή για $s > c + a$. □

Παράδειγμα 6.4.3. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}\{e^{3t}\cos(2t)\}$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $F(s) = \mathcal{L}\{\cos(2t)\} = \frac{s}{s^2+4}$, για $s > 0$. Άρα, έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{e^{3t}\cos(2t)\} = F(s - 3) = \frac{s - 3}{(s - 3)^2 + 4}, \quad \text{για } s > 3.$$

□

Θεώρημα 6.4.4 (Μετασχηματισμός Laplace Παραγώγου)**.** Αν $f(t)$ είναι συνεχής και εκθετικής τάξης, και η $f'(t)$ υπάρχει και είναι τμηματικά συνεχής στο $[0,\infty)$. Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $f'(t)$ και ισχύει ο τύπος

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0). \tag{6.3}$$

Απόδειξη. Επειδή η f είναι εκθετικής τάξης, θα υπάρχουν $c, M, T \geq 0$ τέτοια ώστε

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, \text{ για κάθε } t \geq T.$$

Επομένως ισχύει ότι $|e^{-st}f(t)| \leq Me^{-(s-c)t}$, για κάθε $t \geq T$, που σημαίνει ότι

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st}f(t) = 0 \ ,$$

για κάθε $s > c$. Τώρα, αν $t_1, t_2, \cdots, t_n$ τα σημεία ασυνέχειας της $f'(t)$ στο διάστημα $[0,T]$. Αν σταθεροποιήσουμε $x \geq T$ και θέσουμε $t_0 = 0$ και $t_{n+1} = x$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-st}f'(t)dt &= \sum_{i=0}^{n+1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-st}f'(t)dt \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} e^{-st}f(t)\big|_{t_i}^{t_{i+1}} + s\sum_{i=0}^{n+1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-st}f(t)dt \\ &= e^{-sx}f(x) - f(0) + s\int_0^x e^{-st}f(t)dt.\end{aligned}$$

Έτσι για $s > c$, από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-st}f'(t)dt = \lim_{x\to\infty}\left[e^{-sx}f(x) - f(0) + s\int_0^x e^{-st}f(t)dt\right] =$$
$$= s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

□

Θεώρημα 6.4.5. Αν $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ για $s > a$ ισχύει ότι $F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}$.

Ασκήσεις

6.4. Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{(t-2)^2\}$, αν υπάρχει, και βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

6.5. Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{5e^{-7t} + t + 2e^{2t}\}$, αν υπάρχει, και βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

6.6. Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{e^{3t}\sin t\}$, αν υπάρχει, και βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

6.5 Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Στις προηγούμενες παραγράφους αναλύσαμε εκτενώς τον τρόπο εύρεσης μετασχηματισμού Laplace, αν υπάρχει, καθώς και αλγεβρικές ιδιότητές του. Στη παράγραφο αυτή, θα αναχθούμε στο στο εξής ζήτημα :

Δοσμέσης συνάρτησης $F(s)$, υπάρχει $f(t)$, ώστε $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$;

Το συγκεκριμένο ερώτημα είναι μείζονος σημασίας για την επίτευξη του τελικού μας σκοπού: να επιλύσουμε διαφορικές εξισώσεις με χρήση του μετασχηματισμού Laplace. Η διαδικασία εύρεσης συνάρτησης $f(t)$ ονομάζεται **αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace** και η συνάρτηση $f(t)$ καλείται **αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace** της $F(s)$ και συμβολίζεται με

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Δοσμένης συνάρτηση $F(s)$ επομένως τίθενται τα ακόλουθα ερωτήματα λοιπόν :

(i) Υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $F(s)$;

(ii) Αν υπάρχει είναι μοναδικός ;

(iii) Αν υπάρχει πως μπορούμε να τον προσδιορίσουμε ;

Η ύπαρξη όπως αντίστροφου μετασχηματισμού $F(s)$ δεν είναι πάντα καταφατική. Όπως δείξαμε στο Πόρισμα 6.3.1 πρέπει να ισχύει ότι $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$, όπου είναι σαφές ότι υπάρχει πληθώρα συναρτήσεων που δεν ικανοποιούν την παραπάνω ιδιότητα. Επίσης ο προσδιορισμός αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace είναι ερώτημα όπου η αντιμετώπισή του απαιτεί γνώσεις Μιγαδικών συναρτήσεων, συνεπώς παραλείπεται.

Για το μονοσήμαντο του μετασχηματισμού, εφόσον υπάρχει, χρήσιμο είναι το ακόλουθο θεώρημα, όπου δίνεται χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 6.5.1. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 6.3.1, επομένως υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace αυτών $F(s)$ και $G(s)$ αντίστοιχα. Αν $F(s) = G(s)$ για όλα τα $s > c$ (για κάποιο c), τότε $f(t) = g(t)$, σε όλα τα υποδιαστήματα του $[0, \infty]$ όπου f και g συνεχείς.

Ειδικότερα αν οι f, g είναι συνεχείς στο $[0, \infty)$ τότε είναι και ίσες στο $[0, \infty)$.

Ιδιότητες αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

Θεώρημα 6.5.2 (Γραμμικότητα)**.** Αν $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ και $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ για $s > a$, τότε

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{c_1F(s) + c_2G(s)\right\} = c_1\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + c_2\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιήστε τα Θεωρήματα 6.4.1 και 6.5.1. □

Θεώρημα 6.5.3 (Αντίστροφη Μετατόπιση)**.** Αν $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ για $s > a$, τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\} = e^{ct} f(t),\ c \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Το ζητούμενο είναι άμεσο από το Θεώρημα 6.4.3 □

Θεώρημα 6.5.4. Αν $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ για $s > a$, τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(\frac{s}{\lambda}\right)\right\} = f(\lambda t), \quad \lambda > 0.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. □

Σημειώνουμε ότι αρκετά χρήσιμη για τα ακολουθά παραδείγματα, αλλά και τις επόμενες παραγράφους, αποτελεί η γνώση ανάλυσης κλάσματος σε επι μέρους απλά κλάσματα.

Παράδειγμα 6.5.1. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων :

(i) $F(s) = \dfrac{s^3 - s^2 + 2s - 1}{(s^2+1)(s^2+2)}$

(ii) $F(s) = \frac{2s+3}{s^2+4s+7}$

Λύση. (i) Έχουμε ότι τα $s^2 + 1$ και $s^2 + 2$ είναι ανάγωγα συνεπώς αναζητούμε την εξής ανάλυση

$$\frac{s^3 - s^2 + 2s - 1}{(s^2+1)(s^2+2)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+2} =$$
$$= \frac{(A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (2A+C)s + 2B + D}{(s^2+1)(s^2+2)}$$

Άρα, προκύπτει το εξής σύστημα

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ B + D = -1 \\ 2A + C = 2 \\ 2B + D = -1 \end{cases} \Rightarrow A = 1,\ B = 0,\ C = 0,\ D = -1.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+2} = \mathcal{L}\left\{\cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\right\}.$$

Έτσι έχουμε ότι $f(t) = \cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)$.

(ii) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s+3}{s^2+4s+7} = \frac{2s+3}{(s+2)^2+3} = \frac{2(s+2)}{(s+2)^2+3} - \frac{1}{(s+2)^2+3} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2t}\cos(\sqrt{3}t) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)\right\} \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι $f(t) = e^{-2t}\cos(\sqrt{3}t) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)$.

■

Θεώρημα 6.5.5. Αν $F(s) = \mathcal{L}^{-1}\{f(t)\}$, όπου $f(t)$ τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης a. Τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n F}{ds^n}\right\} = (-t)^n f(t).$$

Παράδειγμα 6.5.2. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+a^2)^2}.$$

Λύση. Έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s}{(s^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2s}{(s^2+a^2)^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right) \\ \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= -\frac{1}{2a}\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(a/s^2+a^2\right)'\right\} \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{2a}(-t\sin(at)) = \frac{t\sin(at)}{2a}$. ■

6.6 Εφαρμογές στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

6.6.1 Εφαρμογές σε Π.Α.Τ.

Έχοντας δομήσει πλέον τα περισσότερα εργαλεία που χρειαζόμαστε πλέον, θα δούμε πως ο μετασχηματισμός Laplace εφαρμόζεται στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Παράδειγμα 6.6.1. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y'' + 3y' + 2y = e^t, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}\{y'' + 3y' + 2y\} = \mathcal{L}\{e^t\} && \Leftrightarrow \\
&\mathcal{L}\{y''\} + 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s-1},\ s > 1 && \Leftrightarrow \\
&s\mathcal{L}\{y'\} - y'(0) + 3\mathcal{L}\{y(t)\} - 3y(0) = \frac{1}{s-1} && \Leftrightarrow \\
&s\left(s\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0)\right) + 3s\mathcal{L}\{y\} - 3 + 2\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s-1} && \Leftrightarrow \\
&s^2\mathcal{L}\{y(t)\} - s + 3s\mathcal{L}\{y(t)\} - 3 + 2\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s-1} && \Leftrightarrow \\
&\left(s^2 + 3s + 2\right)\mathcal{L}\{y(t)\} = s + 3 + \frac{1}{s-1} = \frac{s^2 + 2s - 3}{s-1} && \Leftrightarrow \\
&\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{s^2 + 2s - 3}{(s-1)(s+1)(s+2)}
\end{aligned}
$$

Θα αναλύσουμε την ποσότητα $\frac{s^2+2s-3}{(s-1)(s+1)(s+2)}$ σε απλά κλάσματα. Έστω $A, B, C \in \mathbb{R}$ ώστε

$$
\begin{aligned}
&\frac{s^2 + 2s - 3}{(s-1)(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} && \Leftrightarrow \\
&A(s+1)(s+2) + B(s-1)(s+2) + C(s-1)(s+1) = s^2 + 2s - 3 \\
\Rightarrow &A = \frac{1}{6},\ B = \frac{3}{2},\ C = -\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Άρα, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{6}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{2}{3}\frac{1}{s+1} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{6}e^t + \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-2t}\right\}.$$

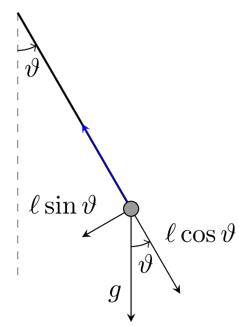
Από το Θεώρημα **;;** συμπεραίνουμε ότι $y(t) = \frac{1}{6}e^t + \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-2t}$. □

Παράδειγμα 6.6.2. Θα δούμε την ακόλουθη εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στην περίπτωση του μαθηματικού εκρεμμούς. Το μαθηματικό εκρεμμές, το οποίο αποτελείται από μία σημειακή μάζα m αναρτημένη στο ένα άκρο αβαρούς, μη εκτατού νήματος μήκος ℓ, του οποίου το άλλο ακρο είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο. Εάν η μάζα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας (δηλαδή το νήμα σχηματίζει γωνία ϑ με την κατακόρυφο), τότε στη μάζα θα ασκείται μία δύναμη μέτρου

$$\frac{ds^2}{dt^2} = -mg\sin\vartheta.$$

Θεωρώντας την γωνία αρκετά μικρή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\sin\vartheta \sim \theta$, με $s = \ell\vartheta$, όπου s το μήκος τόξου που διαγράφεται. Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ περνά από τη θέση $\vartheta(0) = \vartheta_0$ με γωνιακή ταχύτητα $\vartheta'(0) = \vartheta_1$ τότε έχουμε ότι

$$\theta''(t) + \frac{g}{\ell}\vartheta(t) = 0, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0, \vartheta'(0) = \vartheta_1 \tag{6.4}$$



Να βρεθεί η τιμή $\vartheta(t)$ για κάθε $t > 0$.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στην 6.4 έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
&\vartheta''(\sqcup) + \frac{\}}{\ell}\vartheta(\sqcup) = \mathcal{L}\{0\} && \Leftrightarrow \\
&s^2\mathcal{L}\{\vartheta(t)\} - s\vartheta(0) - \vartheta'(0) + \frac{g}{\ell}\mathcal{L}\{\vartheta(t)\} = 0 && \Leftrightarrow \\
&\left(s^2 + \frac{g}{\ell}\right)\mathcal{L}\{\vartheta(t)\} = s\vartheta_0 + \vartheta_1 && \Leftrightarrow \\
&\mathcal{L}\{\vartheta(t)\} = \frac{s\vartheta_0}{s^2 + \frac{g}{\ell}} + \frac{\vartheta_1}{s^2 + \frac{g}{\ell}} && \Leftrightarrow \\
&\mathcal{L}\{\vartheta(t)\} = \mathcal{L}\left\{\vartheta_0 \cos\left(\frac{g}{\ell}t\right) + \vartheta_1\sqrt{\frac{\ell}{g}}\sin\left(\frac{g}{\ell}t\right)\right\}
\end{aligned}
$$

Από το Θεώρημα **;;** συμπεραίνουμε πως

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos\left(\frac{g}{\ell}t\right) + \vartheta_1\sqrt{\frac{\ell}{g}}\sin\left(\frac{g}{\ell}t\right).$$

□

Παράδειγμα 6.6.3 (Εφαρμογή στα γραμμικά συστήματα)**.** Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} x'(t) - 2y(t) = 4t \\ y'(t) + 2y(t) - 4x(t) = -4t - 2 \end{cases} \quad , \quad t > 0, x(0) = 4, y(0) = -5.$$

Απόδειξη. Έστω $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ και $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ Τότε, από την πρώτη εξίσωση έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} - 2\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{4t\} \Rightarrow sX(s) - 4 - 2Y(s) = \frac{4}{s^2} \tag{6.5}$$

και από την δεύτερη εξίσωση έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{y'(t) + 2y(t) - 4x(t)\} = \mathcal{L}\{-4t - 2\} \Rightarrow sY(s) + 5 + 2Y(s) - 4X(s) = -\frac{4}{x^2} - \frac{2}{s} \tag{6.6}$$

Άρα, προκύπτει το εξής σύστημα

$$\begin{cases} sX(s) - 4 - 2Y(s) = \frac{4}{s^2} \\ sY(s) + 5 + 2Y(s) - 4X(s) = -\frac{4}{x^2} - \frac{2}{s} \end{cases}$$

Λύνοντας ως προς X έχουμε ότι

$$X(s) = \frac{4s - 2}{(s+4)(s-2)} = \frac{3}{s+4} + \frac{1}{s-2}.$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace έχουμε ότι $x(t) = 3e^{-4t} + e^{2t}$ και από την δεύτερη σχέση του αρχικού συστήματος έχουμε ότι $y(t) = -6e^{-4t} + e^{2t} - 2t$. $\square$

6.6.2 Συνάρτηση Heaviside

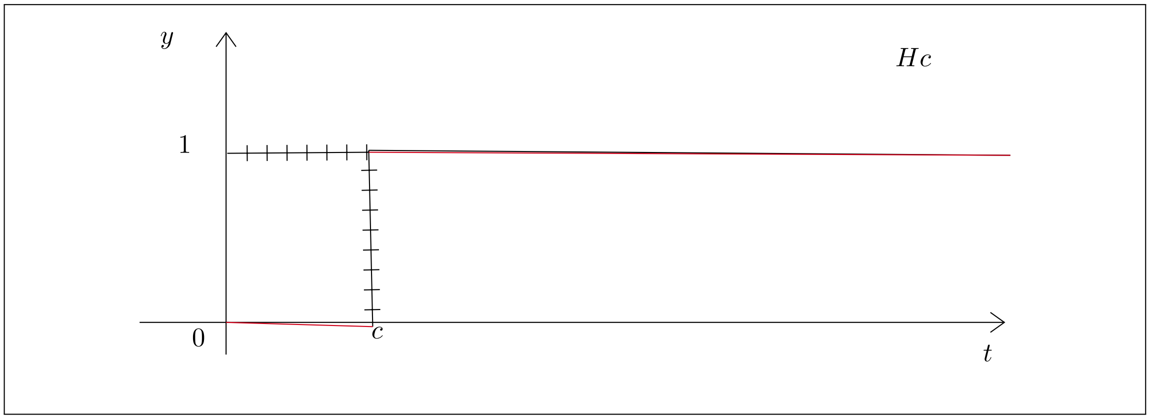
Μερικές από τις πλέον ενδιαφέρουσες εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace εμφανίζονται σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με συναρτήσεις εξαναγκασμού που είναι ασυνεχείς ή συναρτήσεις ώθησης. Διαφορικές εξισώσεις που περιέχουν ασυνεχείς συναρτήσεις στον μη ομογενή όρο, ενώ είναι δύσκολο να λυθούν αναλυτικά με χρήση των προηγούμενων μεθόδων, αντιμετωπίζονται αποτελεσματικά με το μετασχηματισμό Laplace όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Η αντιμετώπιση ασυνεχών συναρτήσεων με πεπερασμένο άλμα διευκολύνεται με το ορισμό της **συνάρτησης μοναδιαίου βήματος ή συνάρτησης Heaviside**, μέσω της οποίας μοντελοποιούνται ασυνεχή φαινόμενα.

Ορισμός 6.6.1. Για $c \geq 0$ η συνάρτηση

$$H_c(t) := \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases},$$

ονομάζεται **συνάρτηση μοναδιαίου βήματος ή συνάρτηση Heaviside**.



Ο μετασχηματισμός Laplace της H_c είναι :

$$\mathcal{L}\{H_c(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} H_c(t) dt = \frac{e^{-sc}}{s}, \; s > 0. \tag{6.7}$$

Έστω $f(t)$ μια δοσμένη συνάρτηση. Επιθυμούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $g(t)$ η οποία είναι ακριβώς ίδια με την f αλλά μετατοπισμένη κατά τέτοιο τρόπο ώστε το σημείο της f που αντιστοιχεί στο $t = 0$ να αντιστοιχεί στο σημείο της g με $t = c$. Ένας αποτελεσματικός τρόπος να ορισθεί η g είναι μέσω της H_c με τον τύπο

$$g(t) := H_c(t) f(t - c).$$

Θεώρημα 6.6.1. Αν $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, \; s > a \geq 0$ με $c > 0$ μια σταθερά. Τότε ισχύει

$$\mathcal{L}\left\{H_c(t) f(t - c)\right\} = e^{-sc} \mathcal{L}\{f(t)\}, \; s > a.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. □

Παράδειγμα 6.6.4. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων

1. $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s^2 + 4}$
2. $F(s) = \dfrac{(s - 4)e^{-3s}}{s^2 - 4s + 5}$

Απόδειξη. 1. Έχουμε διαδοχικά ότι

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{-s}}{s^2 + 4} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} H_1(t) \sin 2(t - 1)\right\}$$

Άρα, έχουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2}H_1(t)\sin 2(t-1).$$

2. Έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned} F(s) = \frac{(s-4)e^{-3s}}{s^2-4s+5} &= \frac{e^{-3s}(s-2)}{(s-2)^2+1} - \frac{2e^{-3s}}{(s-2)^2+1} \\ &= e^{-3s}\mathcal{L}\{e^{2t}\sin t\} - 2e^{-3s}\mathcal{L}\{e^{2t}\sin t\} = \\ &= \mathcal{L}\left\{H_3(t)e^{2(t-3)}\cos(t-3) - 2H_3(t)e^{2(t-3)}\sin(t-3)\right\} \\ &= \mathcal{L}\left\{H_3(t)e^{2(t-3)}[\cos(t-3) - 2\sin(t-3)]\right\} \end{aligned}$$

Άρα έχουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = H_3(t)e^{2(t-3)}[\cos(t-3) - 2\sin(t-3)].$$

□

Παράδειγμα 6.6.5. Να λυθεί το Π.Α.Τ. $y'' + 4y = g(t)$ με $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$, όπου

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}.$$

Απόδειξη. Με χρήση της συνάρτησης Heaviside έχουμε ότι η δ.ε. γράφεται

$$y'' + 4y = 1 - H_\pi(t).$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\{y'' + 4y\} = \mathcal{L}\{1 - H_\pi(t)\} \\ &\Rightarrow s^2\mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi}s}{s} \\ &\Rightarrow \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s(s^2+4)} - \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)} \end{aligned}$$

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\} &= \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{4s} - \frac{s}{4(s^2+4)} - e^{-\pi s}\left[\frac{1}{4s} - \frac{s}{4(s^2+4)}\right] = \\ &= \mathcal{L}\{\cos 2t\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}\{1\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}\{\cos 2t\} - \frac{1}{4}e^{-\pi s}\left[\mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{\cos(2t)\}\right] \\ &= \frac{1}{4}\mathcal{L}\left\{4\cos(2t) + 1 - \cos(2t) - H_\pi\left(1 - \cos 2(t-\pi)\right)\right\} \end{aligned}$$

Άρα έχουμε ότι

$$y(t) = \frac{1}{4}\left[3\cos(2t) + 1 - H_\pi\left(1 - \cos 2(t-\pi)\right)\right].$$

□

6.6.3 Συνάρτηση δ - Dirac

Έχουμε δει ότι ο μετασχηματισμός Laplace μας επιτρέπει να εργαστούμε σε εξισώσεις στις οποίες οι δυνάμεις εξαναγκασμού περιγράφονται με ασυνεχείς συναρτήσεις. Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε έναν άλλο τύπο δυνάμεων που περιγράφονται με τις καλούμενες δυνάμεις ώθησης.

Θεωρούμε μια δύναμη $f(t)$ η οποία δρα πάνω σε ένα σώμα μόνο κατά τη διάρκει ενός πολύ μικρού χρονικού διαστήματος $a \leq t \leq b$ και είναι $f(t) = 0$ για κάθε t εκτός του $[a, b]$. Οι δυνάμεις τέτοιου είδους ονομάζονται **δυνάμεις ώθησης** και εμφανίζονται σε φαινόμενα που χαρακτηρίζονται από ώθηση π.χ. ηλεκτρικές τάσεις, το χτύπημα από ένα σφυρί ή το αποτέλεσμα μιας έκρηξης.

Όταν εμφανίζονται περιπτώσεις δυνάμεων αυτής της μορφής, το αποτέλεσμα εξαρτάται κυρίως μόνο από την τιμή του ολοκληρώματος

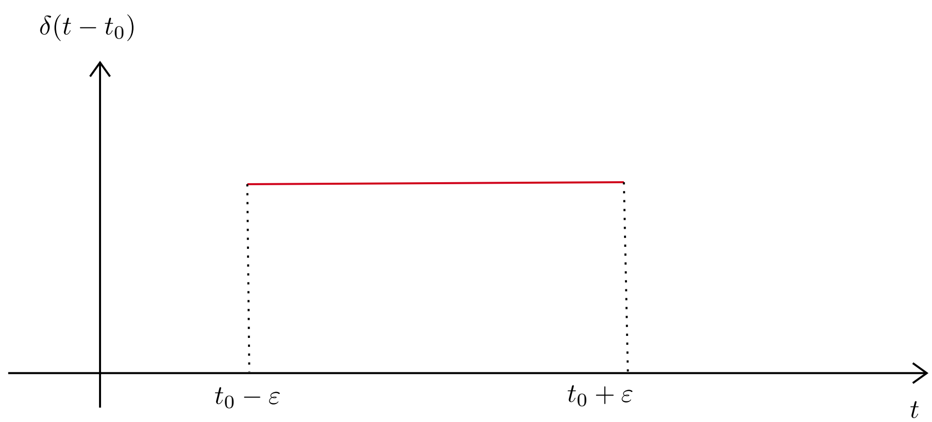
$$p = \int_a^b f(t)dt$$

και όχι πως η f μεταβάλλεται μέσα στο χρόνο. Ο αριθμός p ονομάζεται η **ώθηση** της δύναμης $f(t)$ στο διάστημα $[a, b]$. Για την αντιμετώπισης τέτοιων καταστάσεων στις οποίες εμφανίζονται δυνάμεις ώθησης, είναι λογικό η άγνωστη δύναμη $f(t)$ να αντικατασταθεί με μια απλή και συγκεκριμένη δύναμη η οποία έχει την ίδια ώθηση.

Για λόγους απλότητας, υποθέτουμε ότι η $f(t)$ έχει ώθηση 1 και δρα πάνω στο σώμα αρχίζοντας τη χρονική στιγμή $t = t_0$ για ένα μικρό χρονικό διάστημα. Αν $\varepsilon > 0$ είναι το μήκος του χρονικού διαστήματος, αντικαθιστούμε την $f(t)$ με τη συνάρτηση

$$\delta_\varepsilon(t - t_0) := \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Η παραπάνω συνάρτηση **μοναδιαίας ώθησης** ή **μοναδιαίος παλμός** και απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα :



Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξη ότι η παραπάνω συνάρτηση έχει ορμή 1, δηλαδή συμπεραίνουμε ότι η δ_ε έχει μοναδιαία ώθηση ανεξάρτητα από την επιλογή του ε. Θεωρώντας ότι η συνάρτηση εξαναγκασμού $\delta_\varepsilon(t-t_0)$ δρα κατά τη διάρκεια ολοένα και πιο μικρών χρονικών διαστημάτων, προκύπτει, ως αποτέλεσμα μια οριακής διαδικασίας με $\varepsilon \to 0$, η έννοια της συνάρτησης μοναδιαίας ώθησης $\delta_{t_0}(t)$ από τον ακόλουθο ορισμό

$$\delta_{t_0}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(t-t_0).$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι ισχύει το εξής

$$\delta_{t_0}(t) = \begin{cases} +\infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}$$

Ο όρος ''συνάρτηση'' προφανώς είναι καταχρηστικός για τον παραπάνω τελεστή, όπου είναι ένα παράδειγμα καλούμενων γενικευμένων συναρτήσεων και καλείται **συνάρτηση δ του Dirac**.

Η συνάρτηση δέλτα δεν ικανοποιεί τις συνθήκες ύπαρξης του μετασχηματισμού Laplace, αλλά μπορεί να ορισθεί κατάλληλα σαν το όριο του μετασχηματισμού Laplace της $\delta_\varepsilon(t-t_0)$ καθώς $\varepsilon \to 0$. Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη να δείξει ότι

$$\mathcal{L}\{\delta_{t_0}(t)\} = e^{-st_0}.$$

Γενικά αποδεικνύεται ότι

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta_{t_0}(t)f(t)\} = e^{-st_0}f(t_0).}$$

6.6.4 Συνέλιξη συναρτήσεων

Ορισμός 6.6.2. Έστω f και g τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,\infty)$. Ονομάζουμε **συνέλιξη των συναρτήσεων f και g** τη συνάρτηση

$$(f*g)(t) := \int_0^t f(u)g(t-u)du.$$

Ιδιότητες 6.6.1. (i) $f*(g_1+g_2) = f*g_1 + f*g_2$

(ii) $(f*g)*h = f*(g*h)$

(iii) $f*0 = 0*f = 0$

Απόδειξη. Η απόδειξη των ιδιοτήτων αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. □

Θεώρημα 6.6.2. Υποθέτουμε ότι η συναρτήσεις f και g είναι τμηματικά συνεχείς στο $[0,\infty)$ και εκθετικής τάξης. Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της συνέλιξης $(f*g)$ και μάλιστα ισχύει ότι

$$\mathcal{L}\{f*g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\cdot\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζουμε όλες τους μετασχηματισμούς Laplace των στοιχειωδών συναρτήσεων και τις βασικές ιδιότητές του. Σημειώνουμε ότι για λόγους πρακτικότητας αποφεύχθηκαν οι προϋποθέσεις και οι συνθήκες όπου ισχύουν οι παρακάτω τύποι, οπότε ο αναγνώστης οφείλει να ανατρέξει στις προηγούμενες παραγράφους του κεφαλαίου για να τις βρει.

Μετασχηματισμός Laplace	
1	$\mathcal{L}\{c\} = \frac{s}{c}, \quad c \in \mathbb{R}$
2	$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$
3	$\mathcal{L}\{t^a\} = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \quad a \in \mathbb{R}$
4	$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}$
5	$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$
6	$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$
7	$\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2-a^2}$
8	$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2-a^2}$
9	$\mathcal{L}\{H_c(t)f(t)\} = e^{-sc} \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}$
10	$\mathcal{L}\{\delta_{t_0}(t)f(t)\} = e^{-st_0}f(t_0)$
11	$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}(g(t)), \quad a, b \in \mathbb{R}$
12	$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} \cdot F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$
13	$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s-c), \quad c \in \mathbb{R}$
14	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$
15	$F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}$
16	$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F(s)+c_2G(s)\} = c_1\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + c_2\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
17	$\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(\frac{s}{\lambda}\right)\right\} = \lambda f(\lambda t), \quad \lambda > 0$
18	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\} = e^{ct}f(t), \ c \in \mathbb{R}$
19	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^nF}{ds^n}\right\} = (-t)^n f(t)$
20	$\mathcal{L}\{f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}$

6.7 Ασκήσεις

6.7. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace βρείτε το $\mathcal{L}\{e^{3t}\}$, αν υπάρχει. Αν ο μετασχηματισμός υπάρχει βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

6.8. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace βρείτε το $\mathcal{L}\{e^{-5t}\}$, αν υπάρχει. Αν ο μετασχηματισμός υπάρχει βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

6.9. Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{(t-2)^2\}$, αν υπάρχει, και βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

6.10. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace βρείτε το $\mathcal{L}\{f(t)\}$, αν υπάρχει. Αν ο μετασχηματισμός υπάρχει βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ t-1, & 1 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}.$$

6.11. Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{5e^{-7t} + t + 2e^{2t}\}$, αν υπάρχει, και βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

6.12. Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{e^{3t}\sin t\}$, αν υπάρχει, και βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

6.13. Αν υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, αν υπάρχει, της συνάρτηση $F(s) = \dfrac{s-1}{(s+1)(s^2-4s+4)}$.

6.14. Αν υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, αν υπάρχει, της συνάρτηση $F(s) = \dfrac{1}{(2s-1)^2}$.

6.15. Αν υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, αν υπάρχει, των συναρτήσεων

(α) $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^2}$

(β) $F(s) = \dfrac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)^2}$.

6.16. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 5y^{(2)} - 8y' + 4y = 0, \quad t > 0, y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 3.$$

6.17. Να υπολογισθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{(2s-1)^2}$
2. $F(s) = \dfrac{e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s}}{s}$

6.18. Να λυθεί το Π.Α.Τ. $y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t),\ y(0) = y'(0) = 0$, όπου

$$g(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}.$$

6.19. Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων :

(α) $f(t) = 2t^2 e^{-3t} - \cos^2 t$

(β) $f(t) = 2t^2 - 1 + t\cos(3t)$

(γ) $f(t) = te^{2t}\sin t$

(δ) $f(t) = 1 - \cosh(4t) + e^t \sinh t$

6.20. Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων :

(α) $F(s) = \dfrac{s+2}{(s-5)(s+5)}$

(β) $F(s) = \dfrac{2s-4}{(s-1)^4}$

(γ) $F(s) = \dfrac{s-2}{s^2-4s+19}$

(δ) $F(s) = \dfrac{s}{(s+3)^2}$.

6.21. (α) Να εκφραστεί η συνάρτηση g με τη βοήθεια της συνάρτησης Heaviside όπου

$$g(t) = \begin{cases} f_1(t), & 0 \leq t < c \\ f_2(t), & t \geq c \end{cases}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(β) Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων

(i) $f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t < 3\pi/2 \\ 0, & t \geq 3\pi/2 \end{cases}$

(ii) $f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t < \pi/2 \\ 0, & t \geq \pi/2 \end{cases}$

(iii) $f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t < 5 \\ t+2, & t \geq 5 \end{cases}.$

6.22. Να υπολογισθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων :

(α) $F(s) = \dfrac{1 - e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 9}$

(β) $F(s) = \dfrac{(s-3)e^{-2s}}{s^2 - 4s + 5}$

(γ) $F(s) = \dfrac{2(s-1)e^{-s}}{s^2\,(s^2+2)}$

6.23. Να υπολογισθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων κάνοντας χρήση του θεωρήματος συνέλιξης

(α) $F(s) = \dfrac{e^{-4s}}{s(s+2)}$

(β) $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^2}$

(γ) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+16)^2}$

(δ) $F(s) = \dfrac{s}{(s-2)(s+1)}$

6.24. Να λυθεί το Π.Α.Τ. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

$$y'' + y = \begin{cases} 3t+5, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

6.25. Να λυθεί το Π.Α.Τ. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

$$y'' - 4y' + 4y = \begin{cases} e^t, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

6.26. Να λυθεί το Π.Α.Τ. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

$$y'' + y = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t < \pi \\ 1, & t \geq \pi \end{cases}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

6.27. Να λυθεί το Π.Α.Τ. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t) + H_{2\pi}(t), \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$$

6.28. Να λυθεί το Π.Α.Τ. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

$$y'' + 2y' + 5y = \sin t \cdot \delta\left(t - \frac{3\pi}{2}\right), \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$$

6.29. Να λυθεί η εξίσωση

$$y(t) - \int_0^t (1+u)\, y(t-u)du = 1 - \sinh t.$$

6.30. Να λυθεί η εξίσωση

$$y'(t) + 2y(t) + \int_0^t y(u)du = \sin t,\ y(0) = 1.$$

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ