Μεταθετική Άλγεβρα και εφαρμογές

Ασκήσεις

Κωνσταντινος Μπιζανος

Αθήνα,
8 Αυγούστου 2022

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΜΕΤΑΘΕΤΙΚΟΙ ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ

Όταν αναφέρουμε την ορολογία δακτύλιος, θα εννούμε ότι ο δακτύλιος είναι μεταθετικός με μονάδα.

1.1 Ασκήσεις

1.1. Θεωρούμε τα ιδεώδη $I = (m)$ και $J = (n)$ του $\mathbb{Z}$. Δείξτε τις εξής ισότητες.

(i) $I + J = (d),\ d = \text{μκδ}(m, n)$.

(ii) $I \cap J = (e),\ e = \text{εκπ}(m, n)$.

(iii) $IJ = (mn)$.

(iv) $(I : J) = (c),\ c = m/d$.

1.2. Έστω I, J, K ιδεώδη του δακτυλίου R. Δείξτε τις εξής σχέσεις.

(i) $I \subseteq (I : J)$.

(ii) $(I : J)J \subseteq I$.

(iii) $((I : J) : K) = (I : JK) = ((I : K) : J)$.

(iv) Για κάθε οικογένεια $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ιδεωδών του R, $(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda : J) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda : J)$.

(v) Για κάθε οικογένεια $(J_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ιδεωδών του R, $(I : \sum_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(I : J_\lambda)$

1.3. Έστω μηδενοδύναμο στοιχείο $r \in R$. Δείξτε ότι $1 + r \in U(R)$. Συμπεράνατε ότι $u + r \in U(R)$ για κάθε $u \in U(R)$.

1.4. Έστω R, S δακτύλιοι. Δείξτε ότι κάθε ιδεώδες του $R \times S$ είναι της μορφής $I \times J$, όπου I (αντίστοιχα J) είναι ιδεώδες του R (αντίστοιχα S). Στη συνέχεια δείξτε ότι

$$\frac{R \times S}{I \times S} \simeq \frac{R}{J} \times \frac{S}{J}.$$

1.5. Είναι δυνατό ένα μονικό πολυώνυμο του $R[x]$ να είναι μηδενοδιαιρέτης του $R[x]$;

1.6. Έστω k σώμα ή ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$. Θεωρούμε σημείο $P = (a_1, \dots, a_n) \in k^n = k \times \cdots \times k$ και τον ομομορφισμό εκτίμησης

$$\varphi_P \colon k[x_1, \dots, x_n] \to k, f(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(a_1, ..., a_n).$$

Δείξτε ότι $\ker \varphi_P = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ και $k[x_1, \dots, x_n]/\ker \varphi_P \simeq k$.

1.7. Έστω I, J ιδεώδη του δακτυλίου με $I + J = R$. Δείξτε ότι $I^m + J^n = R$ για κάθε $m, n > 0$.

1.8. Δείξτε τους παρακάτω ισομορφισμούς δακτυλίων.

(i) $\dfrac{\mathbb{Z}[x]}{(5, x^2 + x)} \simeq \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$.

(ii) $\dfrac{\mathbb{R}[x, y]}{(x^2 - y, x - x^3 + xy)} \simeq \mathbb{R}$.

1.9. Ένα στοιχείο $e \in R$ λέγεται ταυτοδύναμο αν $e^2 = e$. Βρείτε τα ταυτοδύναμα στοιχεία στο $\mathbb{Z}_{p^k}$, όπου p πρώτος και $k > 0$. Στη συνέχεια βρείτε τα ταυτοδύναμα στοιχεία του $\mathbb{Z}_{12}$. Τέλος, υπολογίστε το πλήθος των ταυτοδύναμων στοιχείων του $\mathbb{Z}_n$, όπου $n = p_1^{k_1} .... p_s^{k_s}$.

1.10. Δείξτε ότι αν $e \in R$ είναι ταυτοδύναμο, τότε η απεικόνιση

$$R \to (e) \times (1 - e), r \mapsto (er, (1 - e)r)$$

είναι ισομορφισμός δακτυλίων.

1.11. Έστω k σώμα και I ιδεώδες του πολυωνυμικού δακτυλίου $k[x_1, \ldots, x_n]$. Ορίζουμε

$$V(I) = \{P = (a_1, \ldots, a_n) \in k^n : f(P) = 0 \;\; \forall f(x_1, \ldots, x_n) \in I)\}.$$

Το $V(I)$ είναι το σύνολο των κοινών ριζών όλων των πολυωνύμων του I.

Για $k = \mathbb{R}$ και $n = 2$ σχεδιάστε το $V(I)$ στις εξής περιπτώσεις.

- $I = (x^2 + y^2 - 1)$.
- $I = (x - 1, x^2 - y)$.
- $I = ((x - 1)(x^2 - y))$.

Έστω I, J ιδεώδη του $k[x_1, \ldots, x_n]$. Δείξτε τα εξής.

(i) $V(I + J) = V(I) \cap V(J)$.

(ii) $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.

Στη συνέχεια δώστε μια διαισθητική γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος της Άσκησης 1.1.8 (ii).

1.12. Έστω $\varphi \colon R \to S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων.

(i) Δείξτε ότι αν I είναι ιδεώδες του R και ο φ είναι επί, τότε το σύνολο $\varphi(I)$ είναι ιδεώδες του S.

(ii) Δείξτε με παράδειγμα ότι ο προηγούμενος ισχυρισμός δεν αληθεύει γενικά χωρίς την υπόθεση περί επί.

(iii) Δείξτε ότι αν K είναι ιδεώδες του S, τότε το σύνολο $\varphi^{-1}(K)$ είναι ιδεώδες του R.

1.13. Έστω I ιδεώδες του R. Με $IR[x]$ συμβολίζουμε το ιδεώδες του $R[x]$ που παράγεται από το σύνολο I. Δείξτε ότι

$$\frac{R[x]}{IR[x]} \simeq \frac{R}{I}[x].$$

1.14 (Δεύτερο θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων)**.** Έστω S υποδακτύλιος του R και I ιδεώδες του R. Δείξτε ότι το I είναι ιδεώδες του $S + I$, το $S \cap I$ είναι ιδεώδες του S και

$$\frac{S + I}{I} \simeq \frac{S}{S \cap I}.$$

1.2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

1.1. (i) Αφού, $d|n$ και $d|m$ είναι σαφές ότι $I + J \subseteq (d)$. Τώρα, αφού $d = \text{μκδ}(m, n)$, γνωρίζουμε ότι υπάρχουν $x, y \in \mathbb{Z}$ ώστε $d = xm + yn$, συνεπώς έχουμε ότι $d \in I + J$, δηλαδή ισχύει $(d) \subseteq I + J$.

(ii) Αφού, ισχύει ότι $m|e$ και $n|e$ είναι σαφές ότι $(e) \subseteq (m), (n)$, δηλαδή προκύπτει ότι $(e) \subseteq (m) \cap (n)$. Τώρα, αν $x \in (m) \cap (n)$, έχουμε ότι $m|x$ και $n|x$, συνεπώς ισχύει ότι $e|x$, άρα έχουμε ότι $x \in (e)$, δηλαδή $(m) \cap (n) \subseteq (e)$.

(iii) Είναι σαφές ότι $mn \in IJ$, συνεπώς έχουμε ότι $(mn) \subseteq IJ$. Αντίστροφα, έστω $x \in IJ$, δηλαδή $x = \sum_{i=1}^{k} a_i b_i$ με $a_i \in I$ και $b_i \in J$, για κάθε $i = 1, \cdots, k$. Όμως, έχουμε ότι $a_i = x_i m$ και $b_i = y_i n$, με $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$, για κάθε $i = 1, \cdots, k$. Έτσι, έχουμε ότι

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i b_i = \sum_{i=1}^{k} (x_i m)(y_i n) = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i y_i \right) mn \in (mn).$$

Επομένως, έχουμε ότι $IJ \subseteq (mn)$.

(iv) Έχουμε ότι $m = cd$ και $n = c'd$. Θεωρούμε $rc \in (c)$ και $j = kn \in J$. Τότε, έχουμε ότι

$$(rc)j = (rc)(kn) = rkc'(cd) = rkc'm \in (m) \Rightarrow (rc)j \in I.$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $rc \in (I : J)$, άρα προκύπτει ότι $(c) \subseteq (I : J)$.

Αντίστροφα, έστω $r \in (I : J)$, δηλαδή $rJ \subseteq I \Leftrightarrow (rn) \subseteq (m)$. Άρα, έχουμε ότι $m|rn$, συνεπώς $c|rn$. Αφού $(c, n) = 1$, έχουμε ότι $c|r$, επομένως έχουμε ότι $r \in (c)$ και συμπεραίνουμε ότι $(I : J) \subseteq (c)$.

1.2. (i) Έστω $r \in I$. Γνωρίζουμε ότι $rj \in I$, αφού $I \lhd R$, για κάθε $j \in J$. Έτσι, είναι σαφές ότι $rJ \subseteq I$, δηλαδή $r \in (I : J)$.

(ii) Θεωρούμε $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i \in (I : J)J$ με $a_i \in (I : J)$ και $b_i \in J$, για κάθε i. Αφού, $a_i \in (I : J)$ έχουμε ότι $a_i J \subseteq I$, δηλαδή $a_i b_i \in I$, για κάθε $i = 1, \cdots, k$. Αφού ισχύει $I \lhd R$, έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i \in I$.

(iii) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &r \in ((I : J) : K) && \text{ανν} \\ &rK \subseteq (I : J) && \text{ανν} \\ &rKJ \subseteq I && (1) \end{aligned}$$

και

$$\begin{array}{ll} r \in (I : JK) & \text{ανν} \\ rJK \subseteq I & (2) \end{array}$$

Αφού ισχύει ότι $JK = KJ$, από (1) και (2) έχουμε τη ζητούμενη ισότητα. Η δεύτερη ισότητα προκύπτει άμεσα από τη πρώτη.

(iv) Έχουμε ότι

$$\begin{array}{ll} r \in \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda : J\right) & \text{ανν} \\ rJ \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda & \text{ανν} \\ rJ \subseteq I_\lambda, \text{ για κάθε } \lambda \in \Lambda & \text{ανν} \\ r \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (I_\lambda : J) & \end{array}$$

(v) Έχουμε ότι $r \in \left(I : \sum_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda\right)$ αν και μόνο αν $r\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda\right) \subseteq I$ αν και μόνο αν $\sum_{\lambda\in\Lambda} rJ_\lambda \subseteq I$.[1]. Τώρα, αφού γνωρίζουμε ότι $\sum_{\lambda\in\Lambda} rJ_\lambda = \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} rJ_\lambda\right)$, έχουμε ότι οι προηγούμενες σχέσεις είναι ισοδυναμούν με $rJ_\lambda \subseteq I$, για κάθε $\lambda \in \Lambda$ αν και μόνο αν $r \in (I : J_\lambda))$, για κάθε $\lambda \in \Lambda$ αν και μόνο αν $r \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(I : J_\lambda)$.

1.3. Θα δείξουμε απευθείας το γενικότερο αποτέλεσμα. Αφού, το $r \in R$ είναι μηδενοδύναμο, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $r^n = 0_R$. Τώρα, αν $u \in U(R)$ έχουμε την εξής σχέση

$$(u + r)\left(u^{n-1} - u^{n-2}r + \cdots + (-1)^{n-1}r^{n-1}\right) = u^n - (-r)^n = u^n \tag{1.1}$$

όπου το ζητούμενο προκύπτει άμεσα, αφού αν $u \in U(R)$, τότε $u^n \in U(R)$.

1.4. Είναι άμεσο με χρήση των ορισμών να δείξουμε ότι $I \times J \triangleleft R \times S$ αν και μόνο αν $I \triangleleft R$ και $J \triangleleft S$. Τώρα, μέσω της απεικόνιση $\varphi \colon R \times S \to \frac{R}{I} \times \frac{S}{J},\ (r, s) \mapsto (\frac{r}{R}, \frac{s}{S})$ και από 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών έχουμε το ζητούμενο.

1.5. Αν $f(x) = x^n + f_{n-1}x^{n-1} + \cdots + f_0, g(x) = g_m x^m + \cdots + g_0 \in R[x]$ με $g_m \neq 0_R$, γνωρίζουμε ότι $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$, συνεπώς δεν είναι δυνατό ένα μονικό πολυώνυμο του $R[x]$ να είναι μηδενοδιαιρέτης του $R[x]$.

[1] Δείξτε ότι αν $J_\lambda \triangleleft R$, τότε έχουμε ότι $rJ_\lambda \triangleleft R$, για $r \in R$.

1.6. Είναι άμεσο ότι η απεικόνιση φ_P είναι επιμορφισμός δακτυλίων. Αρκεί να δείξουμε ότι $\ker\varphi_P = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ και έπειτα το δεύτερο ζητούμενο θα είναι άμεσο από 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών. Παρατηρούμε ότι αν $f \in (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$, τότε $f \in \ker\varphi_P$, συνεπώς $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \subseteq \ker\varphi_P$.

Ο αντίστροφος ισχυρισμός θα αποδειχθεί με επαγωγή στο n.

- **Βάση.** Αν $n = 1$, τότε για $f(x) \in k[x]$ είναι σαφές ότι $f(x) \in \ker\varphi_P$ αν και μόνο αν $f(a_1) = 0$ αν και μόνο αν $x - a_1 | f(x)$.

- **Επαγωγικό βήμα.** Έστω $f(x_1, \ldots, x_n) \in \ker\varphi_P$, δηλαδή $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Αφού, k είναι περιοχή γνωρίζουμε ότι και $k[x_1, \ldots, x_n]$ είναι περιοχή. [2]. Τώρα, αφού $x_n - a_n \in R[x_n]$ είναι μονικό γνωρίζουμε ότι υπάρχει $q(x_n), r(x_n) \in R[x_n]$, όπου $R = k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$, τέτοια ώστε

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1})(x_n) = q(x_n)(x_n - a_n) + r(x_n) \tag{1.2}$$

με $r(x_n) = 0$ ή $\deg(x_n - a_n) = 1 > \deg r \Leftrightarrow r(x_n) \in R$.

Στην πρώτη περίπτωση το ζητούμενο είναι άμεσο. Αν τώρα, $r = r(x_n) \in R$, τότε έχουμε ότι

$$f(a_1, \ldots, a_n) = q(a_n) \cdot 0 + r \Leftrightarrow r = 0.$$

Όμως $r \in R$, συνεπώς εξαρτάται μόνο από τα $x_1, \ldots, x_{n-1}$ και μηδενίζεται στο σημείο P, συνεπώς από επαγωγική υπόθεση $r \in (x_1 - a_1, \ldots, x_{n-1} - a_{n-1})$ και έχουμε το ζητούμενο.

1.7. Έστω $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Αφού έχουμε ότι $I + J = R$, υπάρχουν $x \in I$, $y \in J$ ώστε $x + y = 1_R$. Αν θέσουμε $k = m + n - 1$, τότε παρατηρούμε ότι

$$1_R = (x+y)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{j-k} y^j = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{k}{j} x^{j-k} y^j + \sum_{j=n}^{k} \binom{k}{j} x^{j-k} y^j \tag{1.3}$$

Για κάθε $j \leq n-1$ έχουμε ότι $k - j \geq m$, άρα $x^{j-k} \in I^m$ και αφού $I^m \triangleleft R$ έχουμε ότι $\sum_{j=0}^{n-1} \binom{k}{j} x^{j-k} y^k \in I^m$. Ομοίως, για κάθε $j \geq n$ ισχύει ότι $y^j \in J^m$ και αφού $J^n \triangleleft R$ έχουμε ότι $\sum_{j=n}^{k} \binom{k}{j} x^{j-k} y^j \in J^n$. Συνεπώς, έχουμε ότι $1_R \in I^m + J^n$, άρα $R = I^m + J^n$.

[2] Το ζητούμενο αποδεικνύεται με επαγωγή στο n και η απόδειξή του για $n = 1$ υπάρχει στο Παράρτημα 1

1.8. (i) Μέσω της απεικόνισης $\varphi\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_5[x],\ f_n x^n + \cdots + f_0 \mapsto [f_n]x^n + \cdots + [f_0]$, όπου $[f_i] \in \mathbb{Z}_5[x]$, από 1ο Θεώρημα ισομορφισμών έχουμε ότι $\dfrac{\mathbb{Z}[x]}{(5)} \simeq \mathbb{Z}_5[x]$ και από τον περιορισμό της φ στο σύνολο $(5, x^2+x)$, ομοίως από 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών έχουμε ότι $\dfrac{(5, x^2+x)}{(5)} \simeq (x^2+x) \triangleleft \mathbb{Z}_5[x]$. Τώρα, από 3ο Θεώρημα Ισομορφισμών έχουμε ότι

$$\frac{\mathbb{Z}[x]}{(5, x^2+x)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[x]/(5)}{(5, x^2+x)/(5)} \simeq \frac{\mathbb{Z}_5[x]}{(x(x+1))} \simeq \frac{\mathbb{Z}_5[x]}{(x)} \times \frac{\mathbb{Z}_5[x]}{(x+1)} \tag{1.4}$$

Τώρα, αφού $\mathbb{Z}_5$ είναι σώμα από την Άσκηση 1.6 έχουμε ότι $\dfrac{\mathbb{Z}_5[x]}{(x)} \simeq \mathbb{Z}_5$ και $\dfrac{\mathbb{Z}_5[x]}{(x+1)} \simeq \mathbb{Z}_5$. Από τη σχέση 1.4 έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Παρατηρούμε ότι $(x^2-y, x-x^3+xy) = (x,y)$, αφού

$$x = \big(x - x(x^2-y)\big) + x(x^2-y) \in (x^2-y, x-x^3+xy)$$

και

$$y = -((x^2-y)+x^2) \in (x^2-y, x-x^3+xy).$$

Τώρα, από την Άσκηση 1.6 είναι άμεσο ότι

$$\frac{\mathbb{R}[x,y]}{(x^2-y, x-x^3+xy)} = \frac{\mathbb{R}[x,y]}{(x,y)} \simeq \frac{\mathbb{R}[x]}{(x)} \simeq \mathbb{R} \tag{1.5}$$

1.9.

- Έστω $R = \mathbb{Z}_{p^k}$ και $[e] \in R$ μηδενοδύναμο, δηλαδή $[e]^2 = [e]$, δηλαδή $p^k | e(e-1)$. Αφού $(e, e-1) = 1$, τότε έχουμε ότι $p^k|e$ ή $p^k|e-1$, δηλαδή $[e]=0$ ή $[e]=1$.
- Αν $R = \mathbb{Z}_{12}$, τότε $[e] \in R$ είναι ταυτοδύναμο αν και μόνο αν $12|e(e-1)$. Τώρα, αφού $(e, e-1) = 1$ έχουμε ότι $4|e$ και $3|e-1$ ή $3|e$ και $4|e-1$. Από τις σχέσεις αυτές, προκύπτει ότι $[e] = 0$ ή $[1]$ ή $[4]$ή $[9]$.
- Αφού $n = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$ και $(p_i, p_j) = 1$, για κάθε $i \neq j$, έχουμε ότι $n|e(e-1)$ αν και μόνο αν $p_i^{k_i}|e(e-1)$, για κάθε $i = 1, \cdots, s$. Συνεπώς, $[e]_n \in \mathbb{Z}_n$ είναι ταυτοδύναμο αν και μόνο αν $[e]_i \in \mathbb{Z}_{p_i^{k_i}}$ είναι ταυτοδύναμο, για κάθε i. Συνεπώς, από το πρώτο ερώτημα, έχουμε ότι $[e]_i = [0]$ ή $[1]$, για κάθε i. Επομένως, υπάρχουν 2^s, ταυτοδύναμα στοιχεία στο $\mathbb{Z}_n$.

1.10. Έστω $r, \lambda \in R$.Είναι άμεσο ότι ισχύει $\varphi(r+\lambda) = \varphi(r) + \varphi(\lambda)$. Τώρα, έχουμε ότι

$$\varphi(r\lambda) = (er\lambda, (1-e)r\lambda) = (er \cdot e\lambda, (1-e)r \cdot (1-r)\lambda) = \varphi(r)\varphi(\lambda) \tag{1.6}$$

αφού το e είναι ταυτοδύναμο, άρα έχουμε ότι φ είναι ομομορφισμός δακτυλίων. Τώρα, $r \in \ker\varphi$ αν και μόνο αν $er = 0$ και $(1-e)r = 0$. Προσθέτοντας τις δύο σχέσεις, προκύπτει ότι $r = 0 \Leftrightarrow \ker\varphi = \{0_R\}$.

Τέλος αρκεί να δείξουμε ότι φ είναι επί. Θεωρούμε $(xe, (1-e)y) \in (e) \times (1-e)$. Αν $r = ex + (1-e)y$ παρατηρούμε ότι $\varphi(r) = (xe, (1-e)y)$, συνεπώς φ είναι επί.

1.11.

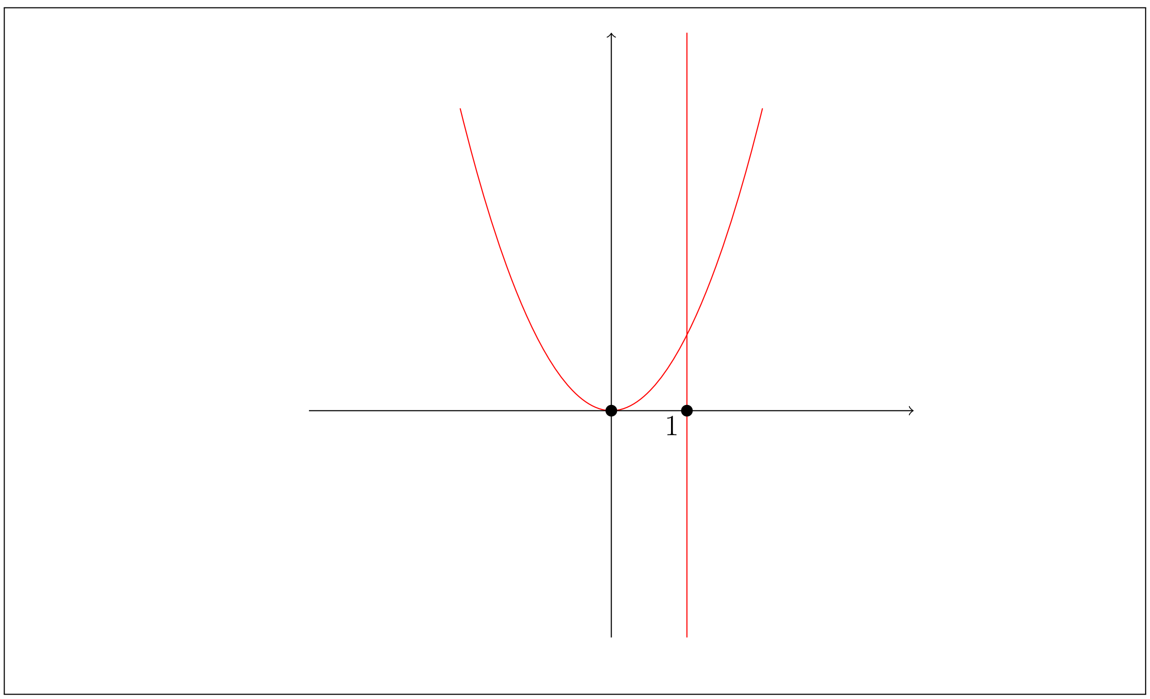
- Θεωρούμε το σύνολο $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\} = C(0,1)$. Παρατηρούμε, ότι $A_1 \subseteq V(I)$, αφού $h(x,y) \in I$ αν και μόνο αν $h(x,y) = f(x,y)(x^2-y^2-1)$ με $f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$. Τώρα, έχουμε ότι $(a_1,a_2) \in V(I)$ αν και μόνο αν $f(x,y) = 0$, για κάθε $f(x,y) \in I$. Όμως, $x^2-y^2-1 \in I$, συνεπώς έχουμε ότι $(a_1,a_2) \in A_1$. Άρα, έχουμε ότι $V(I) = C(0,1)$, δηλαδή το $V(I)$, παριστάνει κύκλο με κέντρο το (0,0) και ακτίνα 1.

- Με όμοια επιχειρηματολογία με το πρώτο ερώτημα έχουμε ότι $V(I) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 \text{ και } y = x^2\} = \{(1,1)\}$. Επομένως, έχουμε ότι το $V(I)$ παριστάνει γεωμετρικά το σημείο (1,1) του επιπέδου.

- Ομοίως με παραπάνω έχουμε ότι

$$V(I) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 \text{ ή } y = x^2\} = \{(1,y) \mid y \in \mathbb{R}^2\} \cup \{(x,x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

  Συνεπώς, το $V(I)$ περιγράφεται γεωμετρικά ως εξής :



Για λόγους πρακτικότητας, θα συμβολίζουμε με $X = (x_1, \cdots, x_n)$ και $P = (a_1, \cdots, a_n)$. Τέλος, πρίν προχωρήσουμε στην απόδειξη των ζητούμενων θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι αν $I \subseteq J$ ιδεώδη του $k[X]$, τότε $V(J) \subseteq V(I)$, όπου η απόδειξή του περιέχεται στο Παράρτημα 2.

(i) Αφού, $I, J \subseteq I + J$, τότε έχουμε ότι $V(I + J) \subseteq V(I)$ και $V(I + J) \subseteq V(J)$, επομένως προκύπτει ότι $V(I + J) \subseteq V(I) \cap V(J)$.

Αντίστροφα, έστω $P \in V(I) \cap V(J)$, δηλαδή $f(P) = 0$ και $g(P) = 0$, για κάθε $f(X) \in I$ και $g(X) \in J$. Τώρα, αν $h(X) \in I + J$ γνωρίζουμε ότι υπάρχουν $f(X) \in I$ και $g(X) \in J$, ώστε $h(X) = f(X) + g(X)$. Συνεπώς, έχουμε ότι $h(P) = f(P) + g(P) = 0$. Αφού το h ήταν τυχόν έχουμε ότι $P \in V(I + J)$ και έχουμε δείξει το ζητούμενο.

(ii) Αφού γνωρίζουμε ότι $IJ \subseteq I, J$, τότε έχουμε ότι $V(I) \subseteq V(IJ)$ και $V(J) \subseteq V(IJ)$, άρα έχουμε ότι $V(I) \cup V(J) \subseteq V(IJ)$.

Αντίστροφα υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι υπάρχει $P \in V(IJ)$, ώστε $P \notin V(I)$ και $P \notin V(J)$. Επομένως, υπάρχουν $f \in I$ και $g \in J$ ώστε $f(P), g(P) \neq 0$. Όμως, έχουμε ότι $f, g \in IJ \Rightarrow f(P) \cdot g(P) = 0$ και αφού k είναι σώμα καταλήγουμε σε άτοπο.

1.12. (i) Αρχικά, $\varphi(I) \neq \emptyset$, αφού $0_S \in \varphi(I)$. Έστω $\varphi(a), \varphi(b) \in \varphi(I)$ και $s \in S$.

- Έχουμε ότι $\varphi(a) - \varphi(b) = \varphi(a - b) \in \varphi(I)$, αφού $I \triangleleft R$.
- Αφού φ είναι επί, υπάρχει $r \in R$, ώστε $\varphi(r) = s$. Συνεπώς, ισχύει ότι $s\varphi(a) = \varphi(r)\varphi(a) = \varphi(ra) \in \varphi(I)$, αφού $I \triangleleft R$.

Επομένως, έχουμε ότι $\varphi(I) \triangleleft S$.

(ii) Θεωρούμε την απεικόνιση $\varphi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ m \mapsto m$, η οποία είναι ομομορφισμός δακτυλίων. Έχουμε άμεσα ότι $\varphi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, όπου $\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$, αλλά το $\varphi(\mathbb{Z})$, δεν είναι ιδεώδες του $\mathbb{Q}$, αφού $\mathbb{Q}$ είναι σώμα, άρα τα μόνο ιδεώδη του είναι τα $\{0\}$ και $\mathbb{Q}$.

(iii) Αρχικά $\varphi^{-1}(K) \neq \emptyset$, αφού $0_R \in \varphi^{-1}(K)$.Έστω $a, b \in \varphi^{-1}(K)$ και $r \in R$, άρα υπάρχουν $x, y \in K$, ώστε $\varphi(a) = x$ και $\varphi(b) = y$.

- Έχουμε ότι $\varphi(a - b) = \varphi(a) - \varphi(b) = x - y \in K$, αφού $K \triangleleft S$ και $x, y \in K$. Συνεπώς, έχουμε ότι $a - b \in \varphi^{-1}(K)$.
- Έχουμε ότι $\varphi(ra) = \varphi(r)\varphi(a) = \varphi(r)x \in K$, αφού $x \in K$ και $\varphi(r) \in S$. Επομένως έχουμε ότι $ra \in \varphi^{-1}(K)$.

Έτσι έχουμε δείξει ότι $\varphi^{-1}(K) \triangleleft S$.

1.13. Μέσω της απεικόνισης

$$\varphi\colon R[x] \to \frac{R}{I}[x],\ f(x) = f_n x^n + \cdots + f_0 \mapsto (f_n + I)\, x^n + \cdots + (f_0 + I)$$

και από το 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών έχουμε το ζητούμενο.

1.14. Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι $I \triangleleft S + I$ και $S \cap I \triangleleft S$. Τώρα, θεωρούμε την απεικονίσεις

$$\psi\colon S + I \to I,\ s + i \mapsto s$$

και

$$\varphi\colon S \to \frac{S}{S \cap I},\ s \mapsto s + (S \cap I)$$

οι οποίες είναι ομομορφισμοί δακτυλίων. Τότε, έχουμε ότι η απεικόνιση $\varphi \circ \psi$ είναι επιμορφισμός δακτυλίων. Τώρα, $s + i \in \ker(\varphi \circ \psi)$ με $s \in S$ και $i \in I$ αν και μόνο αν $s + (S \cap J) = S \cap J$, δηλαδή $s \in I$. Αφού το $I \triangleleft R$, έχουμε ότι $s + i \in I$. Συνεπώς, έχουμε ότι $\ker(\varphi \circ \psi) \subseteq I$ και ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι άμεσος.Από 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών έχουμε το ζητούμενο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΡΩΤΑ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΑ ΙΔΕΩΔΗ

Σχόλιο. Σε αρκετές λύσεις ασκήσεων χρησιμοποιείται ότι αν R περιοχή κύριων ιδεωδών, τότε κάθε με τετριμμένο πρώτο ιδεώδες είναι και μέγιστο, όπου η απόδειξή του βρίσκεται στο Παράρτημα.

2.1 Ασκήσεις

2.1. Βρείτε τα πρώτα και μέγιστα ιδεώδη του R καθώς το $\operatorname{nil}(R)$ και $\operatorname{Jac}(R)$ στις ακόλουθες περιπτώσεις.

(i) $R = \mathbb{Z}$

(ii) $R = \mathbb{Z}_n,\ n = p^2q^3,\ p, q$ διακεκριμένοι πρώτοι.

(iii) $R = \mathbb{R}[x]$.

(iv) $R = \mathbb{C}[x]$.

(v) $R = \mathbb{Q}[x] \Big/ \big(x^2(x-1)\big)$.

2.2. Υπολογίστε το $\sqrt{I}$ στις ακόλουθες περιπτώσεις.

(i) $R = k[x, y],\ I = \big((x-1)^3, y^4\big)$, όπου k σώμα.

(ii) $R = k[x, y],\ I = \big(x - 1, y^2 - 4y - xy + y + 4\big)$, όπου k σώμα.

(iii) $R = \mathbb{Z}[x],\ I = \big(5, x^2 + 2\big)$.

2.3. Έστω I, J ιδεώδη του δακτυλίου R. Δείξτε τις εξής σχέσεις.

(i) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

(ii) $\sqrt{I} = R \Leftrightarrow I = R$.

(iii) $\sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}} = \sqrt{I + J}$.

2.4. Έστω I γνήσιο ιδεώδες του R. Δείξτε ότι $\sqrt{I} = I$ αν και μόνο αν το I είναι τομή κάποιων πρώτων ιδεωδών του R.

2.5. Δείξτε ότι οι ακόλουθοι δακτύλιοι είναι τοπικοί.

(i) $\mathbb{Z}_{(p)}$ όπου p πρώτος αριθμός. Δείξτε ότι το μέγιστο ιδεώδες του $\mathbb{Z}_{(p)}$ είναι το κύριο ιδεώδες που παράγεται από το p και ότι

$$\mathbb{Z}_{(p)} \setminus p\mathbb{Z}_{(p)} \simeq \mathbb{Z}_p.$$

(ii) $R \setminus \mathfrak{m}^n$ για κάθε $n > 0$, όπου $\mathfrak{m}$ μέγιστο ιδεώδες του R.

2.6. Βρείτε παράδειγμα δακτυλίου R με $\mathrm{nil}(R) \neq \mathrm{Jac}(R)$.

2.7. Έστω R, S δακτύλιοι. Δείξτε ότι κάθε πρώτο ιδεώδες του $R \times S$ είναι της μορφής $\mathfrak{p} \times S$ ή $R \times \mathfrak{q}$, όπου $\mathfrak{p}$ (αντίστοιχα $\mathfrak{q}$) είναι πρώτο ιδεώδες του R (αντίστοιχα S).

- Αληθεύει ότι $\mathrm{nil}(R \times S) = \mathrm{nil}(R) \times \mathrm{nil}(S)$;
- Αληθεύει ότι $\mathrm{Jac}(R \times S) = \mathrm{Jac}(R) \times \mathrm{Jac}(S)$;

2.8. Έστω R δακτύλιος ώστε κάθε ιδεώδες που δεν περιέχεται στο $\mathrm{nil}(R)$ περιέχει ταυτοδύναμο στοιχείο διάφορο των 0,1. Δείξτε ότι $\mathrm{nil}(R) = \mathrm{Jac}(R)$. [Θυμίζουμε ότι ένα στοιχείο e λέγεται ταυτοδύναμο αν $e^2 = e$.]

2.9. Αν R δακτύλιος τέτοιος ώστε για κάθε $r \in R$ υπάρχει $n > 1$ (που εξαρτάται από το r) με $r^n = r$, τότε κάθε πρώτο ιδεώδες του R είναι μέγιστο.

2.10. Δείξτε ότι τα μόνα ταυτοδύναμα στοιχεία τοπικού δακτυλίου είναι τα 0,1.

2.11. Έστω $I, J, \mathfrak{p}$ ιδεώδη του R με $\mathfrak{p}$ πρώτο. Δείξτε ότι οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες.

(i) $I \subseteq \mathfrak{p}$ ή $J \subseteq \mathfrak{p}$.

(ii) $I \cap J \subseteq \mathfrak{p}$.

(iii) $IJ \subseteq \mathfrak{p}$.

2.12. Έστω k σώμα και I ιδεώδες του πολυωνυμικού δακτυλίου $k[x_1, \cdots, x_n]$. Ορίζουμε

$$V(I) = \{P = (a_1, \cdots, a_n) \in k^n \mid f(P) = 0, \ \forall f(x_1, \cdots, x_n) \in I\},$$

το σύνολο των κοινών ριζών όλων των πολυωνύμων του J. Κάθε τέτοιο σύνολο $V(J)$ καλείται **αλγεβρικό** σύνολο ή αφφινική πολλαπλότητα (affine variety).

Αν $V \subseteq k^n$ είναι αλγεβρικό σύνολο , θέτουμε

$$I(V) = \{f \in k[x_1, \cdots, x_n] \mid f(P) = 0, , \forall P \in V\},$$

το σύνολο των πολυωνύμων που μηδενίζονται στο V.

Αν $V \subseteq k^n$ είναι αλγεβρικό σύνολο και $f \in k[x_1, \cdots, x_n]$, με f_V συμβολίζουμε τη συνάρτηση

$$f_V \colon V \to k, \ P \mapsto f(P).$$

Πρόκειται περί του περιορισμού της πολυωνυμικής συνάρτησης που ορίζεται από το f στο υποσύνολο V του k^n. Ο **δακτύλιος συντεταγμένων** $k[V]$ του V είναι

$$k[V] = \{f_V \colon f \in k[x_1, \cdots, x_n]\},$$

το σύνολο των περιορισμών στο V όλων των πολυωνυμικών συναρτήσεων $k^n \to k$. Είναι δακτύλιος που ορίζονται κατά σημείο, δηλαδή

$$\begin{aligned}(f_V + g_V)(P) &= f_V(P) + g_V(P),\\ (f_V g_V)(P) &= f_V(P) g_V(P).\end{aligned}$$

Οι αλγεβρογεωμέτρες διακινούν τις πληροφορίες τους πέρα-δώθε πάνω στη γέφυρα

$$\text{Γεωμετρία} \quad V \quad \rightleftharpoons \quad \text{Άλγεβρα} \quad k[V].$$

Στα παρακάτω έστω $V \subseteq k^n$ με κενό αλγεβρικό σύνολο.

(i) Δείξτε ότι το $I(V)$ είναι ιδεώδες του $k[x_1, \cdots, x_n]$ και

$$k[x_1, \cdots, x_n]/I(V) \simeq k[V].$$

(ii) Δείξτε ότι $\mathrm{nil}\,(k(V)) = 0$

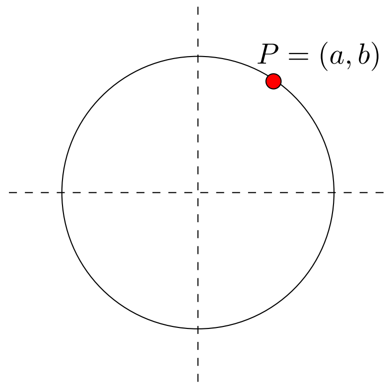
(iii) Για κάθε $P \in V$, έστω $\mathfrak{m}_P \in k[V]$ το σύνολο των πολυωνυμικών συναρτήσεων του $k[V]$ που μηδενίζονται στο P. Δείξτε ότι το $\mathfrak{m}_P$ είναι μέγιστο ιδεώδες του $k[V]$.

(iv) Σύμφωνα με το (iii) έχουμε μια απεικόνιση

$$P \mapsto m_P$$

από το V στα μέγιστα ιδεώδη του $k[V]$. Δείξτε ότι αυτή η απεικόνιση είναι 1-1.

Θα δούμε παρακάτω στο μάθημα ότι αυτή είναι και επί όταν το k είναι αλγεβρικά κλειστό, το φημισμένο Nullstellensatz.



Εδώ $J = (x^2 + y^2 - 1)$ και $V(J)$ είναι ο κύκλος του σχήματος. Το σημείο $P = (a, b)$ αντιστοιχεί στο μέγιστο ιδεώδες

$$\mathfrak{m}_P = (X - a, Y - b)$$

του $k[V] = k[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$, όπου X, Y είναι οι εικόνες των x, y στο $k[V]$.

2.13. Έστω R δακτύλιος, $S = R[x, y]$ και $I = (x)$ το κύριος ιδεώδες του S που παράγεται από το x. Δείξτε ότι το ιδεώδες I είναι πρώτο αν και μόνο αν ο R είναι περιοχή.

2.14. Έστω $\varphi\colon R \to S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων.

(i) Δείξτε ότι αν $\mathfrak{q}$ είναι πρώτο ιδεώδες του S, τότε το σύνολο $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ είναι πρώτο ιδεώδες του R.

(ii) Αληθεύει ότι αν $\mathfrak{m}$ είναι μέγιστο ιδεώδες του S, τότε το σύνολο $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ είναι μέγιστο ιδεώδες του R;

2.15. Έστω ότι R δεν έχει μη μηδενικά μηδενοδύναμα στοιχεία. Δείξτε ότι αν το πλήθος των πρώτων ιδεωδών του R είναι πεπερασμένο, τότε ο R είναι ισόμορφος με υποδακτύλιο δακτυλίου της μορφής $R_1 \times \cdots \times R_n$, όπου κάθε R_i είναι περιοχή.

2.16. Δείξτε ότι ο δακτύλιος

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

δεν είναι περιοχή μοναδική παραγοντοποίησης.

2.17. Έστω R περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης. Δείξτε ότι αν $p \in R$ είναι ανάγωγο, τότε το ιδεώδες (p) είναι πρώτο αλλά όχι αναγκαστικά μέγιστο.

2.18. Έστω k σώμα. Δείξτε ότι κάθε μη μηδενικό πρώτο ιδεώδες του $k[x]$ είναι μέγιστο.

2.2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

2.1. (i) Αφού το $\mathbb{Z}$ είναι περιοχή, τότε (0) είναι πρώτο ιδεώδες του. Το R είναι περιοχή κύριων ιδεωδών, άρα κάθε με τετριμμένο πρώτο ιδεώδες του R είναι και μέγιστο. Τώρα, γνωρίζουμε ότι $(p) \lhd R$ πρώτο αν και μόνο p πρώτος στο R, άρα έχουμε ότι (p), με p πρώτο, είναι τα μοναδικά πρώτα ιδεώδη του R. Τέλος, είναι σαφές ότι

$$\mathrm{nil}(R) = (0) = \bigcap_{p \text{ πρώτος}} (p) = \mathrm{Jac}(R),$$

αφού για κάθε $n \in R$ υπάρχει p πρώτος όπου $p \nmid n$.

(ii) Για τον δακτύλιο R έχουμε το παρακάτω διάγραμμα ιδεωδών

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathbb{Z}_n \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & & (q) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (p) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & (q^2) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (pq) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (p^2) \arrow[dl, dash] \\
(q^3) \arrow[dr, dash] & & (pq^2) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (p^2q) \arrow[dl, dash] & \\
 & (pq^3) \arrow[dr, dash] & & (p^2q^2) \arrow[dl, dash] & & \\
 & & (p^2q^3) & & &
\end{tikzcd}$$

Κάθε πρώτο ιδεώδες του R είναι και μέγιστο, αφού ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
& I = (m) \lhd R \text{ πρώτο} \\
\text{αν και μόνο αν} \quad & \frac{Z_n}{(m)} \simeq \frac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \text{ περιοχή} \\
\text{αν και μόνο αν} \quad & m \text{ πρώτος και } m|n
\end{aligned}$$

Άρα, $(p), (q)$ είναι τα μέγιστα (και πρώτα) ιδεώδη του R. Συνεπώς, έχουμε ότι

$$\mathrm{nil}(R) = \mathrm{Jac}(R) = (p) \cap (q) = (pq).$$

(iii) Αρχικά, έχουμε ότι (0) είναι πρώτο ιδεώδες του R. Αφού $\mathbb{R}$ σώμα έχουμε ότι R είναι περιοχή κύριων ιδεωδών, συνεπώς κάθε μη τετριμμένο πρώτο ιδεώδες του R είναι και μέγιστο. Αφού, $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$ αν και μόνο αν $p(x) = x - a$ ή $p_2x^2 + p_1x + p_0$ με αρνητική διακρίνουσα, τότε τα μόνα μέγιστα ιδεώδη είναι τα $(p(x))$, όπου $p(x)$ είναι ανάγωγο.

Τώρα, έχουμε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το ιδεώδες $(x-a)$ είναι μέγιστο, αφού $\mathbb{R}[x]/(x-a) \simeq \mathbb{R}$, άρα $\mathrm{Jac}(R) \subseteq \bigcap_{a\in\mathbb{R}}(x-a) = (0)$. Έτσι, έχουμε ότι $\mathrm{Jac}(R) = \mathrm{nil}(R) = (0)$.

(iv) Αρχικά, έχουμε ότι (0) είναι πρώτο ιδεώδες του R. Αφού $\mathbb{C}$ σώμα έχουμε ότι R είναι περιοχή κύριων ιδεωδών, συνεπώς κάθε μη τετριμμένο πρώτο ιδεώδες του R είναι και μέγιστο. Τώρα, τα μόνα ανάγωγα πολυώνυμα στο $\mathbb{C}[x]$ είναι τα $x-a$, με $a \in \mathbb{C}$, άρα τα μόνα πρώτα (και μέγιστα) ιδεώδη είναι τα $(x-a)$, με $a \in \mathbb{C}$. Ομοίως με (iii) έχουμε ότι $\mathrm{Jac}(R) = \mathrm{nil}(R) = (0)$.

(v) Για τον δακτύλιο R έχουμε το παρακάτω διάγραμμα ιδεωδών.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}[x] \big/ \big(x^2(x-1)\big) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(x-1)\mathbb{Q}[x] \big/ \big(x^2(x-1)\big) \arrow[dr, dash] & & x\mathbb{Q}[x] \big/ \big(x^2(x-1)\big) \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] \\
 & x(x-1)\mathbb{Q}[x] \big/ \big(x^2(x-1)\big) \arrow[dd, dash] & \\
 & & x^2\mathbb{Q}[x] \big/ \big(x^2(x-1)\big) \arrow[dl, dash] \\
 & (0) &
\end{tikzcd}$$

Τώρα, από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι τα μόνα μέγιστα και πρώτα ιδεώδη του R είναι τα $(x-1)\mathbb{Q}(x)/\big(x^2(x-1)\big)$ και $x\mathbb{Q}(x)/\big(x^2(x-1)\big)$.

Πράγματι, ότι τα παραπάνω είναι τα μέγιστα του R είναι άμεσο. Τώρα, θα δείξουμε ότι το $x(x-1)\mathbb{Q}[x] \big/ \big(x^2(x-1)\big)$ δεν είναι πρώτο και ομοίως ισχύει για τα υπόλοιπα εκτός των παραπάνω δύο. Έχουμε ότι

$$x(x-1) + \big(x^2(x-1)\big) \in x(x-1)\mathbb{Q}[x] \big/ \big(x^2(x-1)\big) \ ,$$

αλλά $x + \big(x^2(x-1)\big), x-1+\big(x^2(x-1)\big) \notin x(x-1)\mathbb{Q}[x] \big/ \big(x^2(x-1)\big)$.

Συνεπώς, έχουμε ότι

$$\mathrm{nil}(R) = \mathrm{Jac}(R) = (x-1)R \cap xR = x(x-1)R.$$

2.2. (i) Θα δείξουμε ότι $\sqrt{I} = (x-1, y)$. Έχουμε άμεσα ότι $(x-1,y) \subseteq \sqrt{I}$, αφού $(x-1)^3, y^4 \in I$. Τώρα, το $(x-1,y)$ είναι μέγιστο στο R και αφού $\sqrt{I} \subsetneqq R$, τότε έχουμε ότι $\sqrt{I} = (x-1,y)$. (Αν $\sqrt{I} = R$, τότε $1 \in \sqrt{I}$, δηλαδή $1 \in I$, συνεπώς $I = R$, το οποίο είναι άτοπο.)

(ii) Παρατηρούμε ότι $I = \big(x-1, y^2-4y-xy+y+4\big) = \big(x-1,(y-4)^2\big)$, αφού είναι σαφές ότι $\big(x-1,y^2-4y-xy+y+4\big) \subseteq \big(x-1,(y-2)^2\big)$ και επίσης $(y-2)^2 = y^2-4y-xy+y+4+y(x-1) \in I$. Τώρα, με όμοια με το (i) Έχουμε ότι $\sqrt{I} = (x-1, y-2)$.

(iii) Από το 3ο Θεώρημα Ισομορφισμών και όμοια με την Άσκηση 1.8 έχουμε το εξής :

$$\frac{\mathbb{Z}[x]}{(5,x^2+2)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[x]/(5)}{(5,x^2+2)/(5)} \simeq \frac{\mathbb{Z}_5[x]}{(x^2+2)}.$$

Παρατηρούμε ότι το x^2+5 δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{Z}_5$, άρα είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}_5[x]$, άρα $\dfrac{\mathbb{Z}_5[x]}{(x^2+2)}$ είναι σώμα. Επομένως, το R/I είναι σώμα, άρα το I είναι μέγιστο στο R. Έτσι προκύπτει ότι $\sqrt{I} = I$.

2.3. (i) Γνωρίζουμε ότι $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\sqrt{I}}$. Έστω $x \in \sqrt{\sqrt{I}}$, δηλαδή υπάρχει $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, ώστε $x^n \in \sqrt{I}$. Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, ώστε $x^{mn} = (x^n)^m \in I$ και έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Αν $I = R$, τότε έχουμε ότι $\sqrt{I} = \sqrt{R} = R$. Αντίστροφα, έστω $R = \sqrt{I}$, δηλαδή $1_R \in \sqrt{I}$. Έτσι, έχουμε ότι $1_R = 1_R^n \in I$, για κάποιο $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ και έχουμε το ζητούμενο.

(iii) Έχουμε ότι $I \subseteq \sqrt{I}$ και $J \subseteq \sqrt{J}$, άρα έχουμε ότι $I + J \subseteq \sqrt{I} + \sqrt{J}$, συνεπώς ισχύει ότι $\sqrt{I+J} \subseteq \sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}$, δηλαδή υπάρχει $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, ώστε $x^n \in \sqrt{I}+\sqrt{J}$. Έτσι, έχουμε ότι $x^n = y + z$ με $y \in \sqrt{I}$ και $y \in \sqrt{J}$, άρα υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$, ώστε $y^{n_1} \in I$ και $z^{n_2} \in J$. Τότε, έχουμε ότι

$$(x^n)^{n_1+n_2} = \sum_{j=0}^{n_2} \binom{n_1+n_2}{j} y^{n_1+n_2-j} z^j + \sum_{j=n_2+1}^{n_1+n_2} \binom{n_1+n_2}{j} y^{n_1+n_2-j} z^j = a + b\ ,$$

όπου $a \in I$ και $b \in J$. Άρα, έχουμε ότι $x^{n(n_1+n_2)} \in I + J$, δηλαδή $x \in \sqrt{I+J}$.

2.4. Αν $\sqrt{I} = I$ το ζητούμενο είναι άμεσο, αφού $\sqrt{I}$ είναι η τομή όλων των πρώτων ιδεωδών, που περιέχουν το I. Αντίστροφα, αν I είναι τομή κάποιας οικογένειας ιδεωδών $\{\mathfrak{p}_i\}_{i \in I}$ του R, τότε έχουμε ότι $I \subseteq \mathfrak{p}_\mathrm{i}$, για κάθε $i \in I$. Συνεπώς, είναι σαφές ότι

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \text{ πρώτο και } I \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathfrak{p}_i = I.$$

Η αντίστροφη σχέση ''περιέχεσθαι'' ισχύει πάντα, άρα έχουμε το ζητούμενο.

2.5. (i) Αφού, $\mathbb{Z}_{(p)} \setminus U\left(\mathbb{Z}_{(p)}\right) = p\mathbb{Z}_{(p)}$ είναι ιδεώδες του $\mathbb{Z}_{(p)}$, τότε έχουμε ότι ο $\mathbb{Z}_{(p)}$ είναι τοπικός και μάλιστα $\mathfrak{m} = p\mathbb{Z}_{(p)}$, το μοναδικό μέγιστο ιδεώδες του $\mathbb{Z}_{(p)}$. Τώρα, θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)},\ n \mapsto n + \left(p\mathbb{Z}_{(p)}\right)$$

Είναι σαφές ότι φ είναι ομομορφισμός δακτυλίων και μάλιστα $\ker\varphi = p\mathbb{Z}$. Παρατηρούμε ότι $|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}| = p = |\mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)}|$, συνεπώς από την αρχή του περιστερώνα και το 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών είναι σαφές ότι $\mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)} \simeq \mathbb{Z}_p$

2.6. Με τους συμβολισμούς της παραπάνω άσκησης έχουμε ότι $R = \mathbb{Z}_{(p)}$ είναι τοπικός και περιοχή, άρα ισχύει ότι

$$\operatorname{nil}(R) = (0) \neq p\mathbb{Z}_{(p)} = \operatorname{Jac}(R).$$

2.7. (i) Έστω $I \times J \lhd R \times S$ πρώτο, όπου από την Άσκηση 1.4 έχουμε ότι $I \lhd R$ και $J \lhd S$. Αρχικά, θα δείξουμε ότι I, J πρώτα. Έστω $a, b \in R$, ώστε $ab \in I$. Τότε, έχουμε ότι $(ab, 0) \in I \times J$, άρα $(a, 0) \cdot (b, 0) \in I \times J$. Αφού, το $I \times J$ είναι πρώτο έχουμε ότι $(a, 0) \in I \times J$ ή $(b, 0) \in I \times J$, δηλαδή $a \in I$ ή $b \in I$. Ομοίως δείχνουμε ότι J είναι πρώτο στο S.

Τώρα, αφού $I \times J \neq \emptyset$ ισχύει ότι υπάρχει $(x, y) = (x, 1_S) \cdot (1_R, y) \in I \times J$ και αφού $I \times J$ πρώτο συμπεραίνουμε ότι $1_R \in I$ ή $1_S \in J$. Το $I \times J$ είναι πρώτο, άρα γνήσιο, έτσι συμπεραίνουμε ότι $I \times J$ είναι της μορφής $R \times \mathfrak{q}$ ή $\mathfrak{p} \times S$, όπου $\mathfrak{p}$ (αντίστοιχα $\mathfrak{q}$) είναι πρώτο ιδεώδες του R (αντίστοιχα S).

(ii) Έστω $(x, y) \in \operatorname{nil}(R \times S)$, δηλαδή υπάρχει $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ώστε $(x^n, y^n) = (x, y)^n = (0, 0) \Leftrightarrow x^n = 0_R$ και $y^n = 0_S$. Άρα, έχουμε ότι $(x, y) \in \operatorname{nil}(R) \times \operatorname{nil}(S)$.

Αντίστροφα, αν $(x, y) \in \operatorname{nil}(R) \times \operatorname{nil}(S)$ έχουμε ότι υπάρχουν $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ ώστε $x^n = 0_R$ και $y^m = 0_S$. Τότε, έχουμε ότι $(x, y)^{mn} = (0_R, 0_S)$, άρα ισχύει ότι $(x, y) \in \operatorname{nil}(R \times S)$.

(iii) Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο αληθεύει μέσω του εξής ισχυρισμού :

Ισχυρισμός 1. Ένα ιδεώδες του $R \times S$ είναι μέγιστο αν και μόνο είναι της μορφής $R \times \mathfrak{q}$ ή $\mathfrak{p} \times S$, όπου $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ μέγιστα ιδεώδη των R, S αντίστοιχα.

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι ο αντίστροφος ισχυρισμός ισχύει πάντα. Τώρα, αν $I \times J$ μέγιστο ιδεώδες του $R \times S$, προφανώς κάποιο εκ των I, J είναι γνήσιο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι I είναι γνήσιο ιδεώδες του R.

Αν I δεν είναι μέγιστο ιδεώδες του $R \times S$, τότε, υπάρχει $\mathfrak{m}$ μέγιστο του R, ώστε $I \subseteq \mathfrak{m}$. Συνεπώς, έχουμε ότι

$$I \times J \subsetneqq \mathfrak{m} \times J \subsetneqq R \times J\ ,$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού $I \times J$ μέγιστο. Τότε, έχουμε ότι I είναι μέγιστο ιδεώδες του R. Τώρα, είναι σαφές ότι $J = S$, καθώς αν $J \subsetneqq S$, τότε $I \times J \subsetneqq R \times J \subsetneqq R \times S$, το οποίο είναι άτοπο. Ομοίως και στην περίπτωση, οπου J γνήσιο ιδεώδες του S. $\square$

Τώρα, έχουμε ότι $(r,s) \in \mathrm{Jac}(R \times S)$ **αν και μόνο αν** $(r,s) \in \mathfrak{m} \times S$ και $R \times \mathfrak{q}$, για κάθε $\mathfrak{m}, \mathfrak{q}$ μέγιστα των R, S αντίστοιχα **αν και μόνο αν** $r \in \mathfrak{m}$ και $s \in \mathfrak{q}$, για κάθε $\mathfrak{m}, \mathfrak{q}$ μέγιστα των R, S αντίστοιχα **αν και μόνο αν** $(r,s) \in \mathrm{Jac}(R) \times \mathrm{Jac}(S)$.

2.8. Έστω ότι $\mathrm{nil}(R) \subsetneqq \mathrm{Jac}(R)$, δηλαδή από την αρχική υπόθεση υπάρχει $e \in \mathrm{Jac}(R)$ με $e \neq 0, 1$ ταυτοδύναμο. Συνεπώς, έχουμε ότι $1 - e \in U(R)$ ή $e \in U(R)$, και από τη σχέση $e(1-e) = 0$ έχουμε ότι $e = 0$ ή $e = 1$, το οποίο είναι άτοπο.

2.9. Έστω $\mathfrak{p}$ πρώτο ιδεώδες του R. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\mathfrak{m}$ μέγιστο ώστε $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $r \in \mathfrak{m}$ και $r \notin \mathfrak{p}$.

Αφού $r \in R$, υπάρχει $n > 1$, ώστε $r^n = r \Leftrightarrow r(1 - r^{n-1}) = 0 \in \mathfrak{p}$. Αφού $\mathfrak{p}$ πρώτο και $r \notin \mathfrak{p}$ έχουμε ότι $1 - r^{n-1} \in \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$. Τότε, έχουμε ότι $1 = (1 - r^{n-1}) + r^{n-1} \in \mathfrak{m}$, το οποίο είναι άτοπο.

2.10. Έστω R τοπικός δακτύλιος και $e \in R$ ταυτοδύναμο στοιχείο. Τότε, έχουμε ότι $0 = e(1-e) \in \mathfrak{m} = Jac(R)$, όπου $\mathfrak{m}$ το μοναδικό μέγιστο ιδεώδες του R. Άρα, έχουμε ότι $e \in \mathrm{Jac}(R)$ ή $1 - e \in \mathrm{Jac}(R)$, δηλαδή $1 - e \in U(R)$ ή $e = 1 - (1 - e) \in U(R)$. Συνεπώς, από τη σχέση $e(1-e) = 0$ έχουμε ότι $e = 0$ ή $e = 1$. Ότι τα στοιχεία $0, 1$ είναι μηδενοδύναμα είναι άμεσο.

2.11. Ενδεικτικά θα δείξουμε τη συνεπαγωγή (iii) $\to$ (i). Έστω ότι $I \nsubseteq \mathfrak{p}$, δηλαδή υπάρχει $x \in I$, όπου $x \notin \mathfrak{p}$. Αν $y \in J$, τότε έχουμε ότι $xy \in IJ$, δηλαδή $xy \in \mathfrak{p}$. Αφού $\mathfrak{p}$ είναι πρώτο και $x \notin \mathfrak{p}$, τότε έχουμε ότι $y \in \mathfrak{p}$, δηλαδή $J \subseteq \mathfrak{p}$.

2.12. (i) Είναι άμεσο ότι $I(V) \lhd k[x_1, \cdots, x_n]$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\varphi \colon k[x_1, \cdots, x_n] \to k[V], \ f \mapsto f_V.$$

Είναι σαφές ότι φ είναι επιμορφισμός. Τώρα, αν $f \in \ker \varphi$ έχουμε ότι $\varphi(f) = f_V = 0$, δηλαδή $f(P) = 0$, για κάθε $P \in V$. Συνεπώς, έχουμε ότι $f \in I(V)$. Η αντίστροφη σχέση ''περιέχεσθαι'' είναι άμεση και το ζητούμενο έπεται από το 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών.

(ii) Έστω $f_V \in \mathrm{nil}(k(V))$, δηλαδή υπάρχει $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ώστε $f_V^n = 0$. Άρα, έχουμε ότι $(f(P))^n = 0$, για κάθε $P \in V$. Όμως, $f(P) \in k$, συνεπώς έχουμε ότι $f(P) = 0$, για κάθε $P \in V$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $f_V = 0$.

(iii) Έστω $P \in V$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\psi_P \colon k[V] \to k, \ f_V \mapsto f_V(P).$$

Έχουμε ότι ψ_P είναι επιμορφισμός με $\ker \psi_P = \mathfrak{m}_P$ και από 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών έχουμε ότι $k[V]/\mathfrak{m}_P \simeq k$ σώμα, άρα έχουμε ότι $\mathfrak{m}_P$ είναι μέγιστο.

(iv) Αρχικά, η απεικόνιση είναι καλά ορισμένη, λόγω της μεγιστικότητας των $\mathfrak{m}_P$. Έστω $P = (p_1, \cdots, p_n) \neq (q_1, \cdots, q_n) = Q$, συνεπώς υπάρχει j, ώστε $p_j \neq q_j$. Άρα, αν $f(x_1, \cdots, x_n) = x_j - p_j$, έχουμε ότι $f_V \in \mathfrak{m}_P$, αλλά $f_V \notin \mathfrak{m}_Q$. Επομένως, έχουμε ότι $\mathfrak{m}_P \neq \mathfrak{m}_Q$.

2.13. Έχουμε ότι $S/I \simeq R[y]$ μέσω της απεικόνισης $\varphi\colon R[y][x] \to R[y],\ f \mapsto f(0)$. Έχουμε λοιπόν ότι, I είναι πρώτο αν και μόνο αν S/I είναι περιοχή αν και μόνο αν $R[y]$.

2.14. (i) Έχουμε δείξει ότι $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \lhd R$. Είναι σαφές ότι $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ είναι γνήσιο ιδεώδες του R, αφού φ ομομορφισμός, άρα $\varphi(1_R) = 1_S \notin \mathfrak{p}$.

Τώρα, έστω $ab \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, δηλαδή $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) = s \in \mathfrak{q}$. Αφού το $\mathfrak{q}$ είναι πρώτο έχουμε ότι $\varphi(a) \in \mathfrak{q}$ ή $\varphi(b) \in \mathfrak{q}$, συνεπώς $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ ή $b \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$.

(ii) Αν $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ n \mapsto n$, έχουμε ότι (0) είναι μέγιστο ιδεώδες του $\mathbb{Q}$, αφού $\mathbb{Q}$ είναι σώμα, αλλά έχουμε ότι $\varphi^{-1}((0)) = (0)$, το οποίο δεν είναι μέγιστο ιδεώδες του $\mathbb{Z}$, αφού $(0) \subsetneqq 2\mathbb{Z}$.

2.15. Έστω $p_1, \cdots, p_n$ τα πρώτα ιδεώδη του R. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varphi\colon R \to \frac{R}{p_1} \times \cdots \times \frac{R}{p_n},\ r \mapsto (r + (p_1), \cdots, r + (p_n))\,.$$

Η φ είναι άμεσα ομομορφισμός δακτυλίων. Έστω $r \in \ker\varphi$, δηλαδή $r \in \mathrm{nil}(R) = \bigcap_j p_j$, άρα έχουμε ότι $r = 0$. Συνεπώς έχουμε ότι $R \hookrightarrow R_1 \times \cdots \times R_n$, όπου $R_i = \dfrac{R}{p_i}$ περιοχή, αφού p_i πρώτο, για κάθε i.

2.16. Θεωρούμε την απεικόνιση $N(a+3ib) = (a+\sqrt{3}ib)\left(\overline{a+\sqrt{3}ib}\right) = a^2+3b^2$. Είναι σαφές, από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών, ότι η N είναι πολλαπλασιαστική.

- Αρχικά θα δείξουμε ότι $U(\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]) = \{\pm 1\}$. Έστω $x = a+\sqrt{3}ib \in U(\mathbb{Z}[\sqrt{-3}])$, δηλαδή υπάρχει $y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, ώστε $xy = 1$. Έτσι, έχουμε ότι $N(x)N(y) = N(xy) = N(1) = 1$. Αφού $N(x) \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $N(x) = 1$. Από αυτή τη σχέση προκύπτει ότι $a = 1$ ή -1 και $b = 0$. Άρα, έχουμε ότι $U(\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]) = \{\pm 1\}$.

- Τα $2, 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i$ είναι ανάγωγα στοιχεία στο $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. Έστω $a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, ώστε $2 = ab \Rightarrow N(2) = N(a)N(b) = 4$. Αν a δεν είναι αντιστρέψιμο έχουμε ότι $N(a) = 2$ ή $N(a) = 4$. Αν $N(a) = 4$ είναι άμεσο ότι b είναι αντιστρέψιμο. Αν $N(a) = N(x + \sqrt{3}iy) = x^2 + 3y^2 = 2$. Αν $y \neq 0$, τότε $N(a) \geq 3$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, για $y = 0$ έχουμε ότι $x^2 = 2$, το οποίο είναι άτοπο, αφού $x \in \mathbb{Z}$. Άρα, σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο.

  Ομοίως, αποδεικνύουμε και τα υπόλοιπα.

- Έχουμε τώρα, ότι $2 \cdot 2 = 4 = (1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)$ με $2 \neq 1+\sqrt{3}i$ και $1-\sqrt{3}i$, άρα συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ δεν είναι περιοχή μοναδική παραγοντοποίησης.

2.17. Έστω $a = u_a p_{a_1} \cdots p_{a_s}$ και $b = u_b p_{b_1} \cdots p_{b_k}$, με $u_a, u_b \in U(R)$ και p_{a_i}, p_{b_j} ανάγωγα στο R, ώστε $p|ab$. Τώρα, αφού R είναι Π.Μ.Π. έχουμε ότι $p = p_{a_i}$ ή p_{b_j}, για κάποια i και j. Έτσι, είναι σαφές ότι $p|a$ ή $p|b$.

Έχουμε ότι 5 είναι πρώτο στο $\mathbb{Z}[x]$, άρα (5) είναι πρώτο στο $\mathbb{Z}[x]$, όμως δεν είναι μέγιστο, αφού $(5) \subsetneqq (5, x^2+2) \subsetneqq \mathbb{Z}[x]$ (βλέπε Άσκηση 2.2 (iii)).

2.18. Έστω $(0) \neq I = (p(x)) \triangleleft k[x]$ πρώτο. Αρκεί να δείξουμε ότι $p(x)$ είναι ανάγωγο στο $k[x]$. Έστω $p(x) = a(x)b(x) \in (p(x))$ και αφού $p(x)$ πρώτο, τότε $a(x) \in (p(x))$ ή $b(x) \in (p(x))$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έχουμε ότι $a(x) \in (p(x))$, δηλαδή $a(x) = p(x)q(x)$. Συνεπώς, έχουμε ότι $p(x)(1 - q(x)b(x)) = 0$ και αφού $k[x]$ περιοχή και $p(x) \neq 0$ έχουμε ότι $b(x) \in U(k[x])$ και έχουμε δείξει το ζητούμενο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ ΤΗΣ NOETHER

Για λόγους πρακτικότητας στις λύσεις των ασκήσεων με τον συμβολισμό $k[X]$ θα εννοούμε το δακτύλιο πολυωνύμων $k[x_1, \dots, x_n]$.

3.1 Ασκήσεις

3.1. Έστω k σώμα και $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$. Δείξτε ότι υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $S_0 \subset S$ τέτοιο ώστε $V(S_0) = V(S)$.

3.2. Αληθεύει το αντίστροφο του Θεωρήματος Βάσης του Hilbert;

3.3. Στις ακόλουθες περιπτώσεις εξετάστε αν ο δακτύλιος R είναι της Noether.

(i) $R = S[x, y]/I$, όπου S δακτύλιος της Noether και I ιδεώδες του $S[x, y]$.

(ii) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]/(4)$.

(iii) R ο δακτύλιος των απεικονίσεων $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(iv) R ο δακτύλιος των απεικονίσεων $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $n > 1$.

(v) $R = \{a_{2n}x^{2n} + ... + a_2x^2 + a_0 \,|\, n \geq 0\}$ υποδακτύλιος του $\mathbb{Z}[x]$.

3.4. Έστω k σώμα, n θετικός ακέραιος και $f_1, f_2, \dots \in k[x_1, \dots, x_n]$. Για κάθε ακέραιο $m \geq 2$ θέτουμε $X_m = \{P \in k^n \,|\, f_1(P) = \ldots = f_{m-1}(P) = 0 \text{ και } f_m(P) = 1\}$. Δείξτε ότι υπάρχει N τέτοιο ώστε $X_m = \varnothing$ για κάθε $m \geq N$.

3.5. Ποια από τα ακόλουθα ιδεώδη του $k[x,y]$, όπου k σώμα, είναι πρωταρχικά;

(i) (xy).

(ii) $(x-y)$.

(iii) $(x^2, x-y)$.

3.6. (i) Βρείτε όλα τα πρωταρχικά ιδεώδη του $\mathbb{Z}$.

(ii) Δείξτε ότι το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής έπεται από το 1ο θεώρημα μοναδικότητας στην πρωταρχική ανάλυση ιδεωδών χωρίς τη χρήση του 2ου θεωρήματος μοναδικότητας.

3.7. Έστω $\varphi : R \to S$ ομομορφισμός δακτυλίων και J ιδεώδες του S. Θυμίζουμε ότι με J^c συμβολίζουμε το ιδεώδες $\varphi^{-1}(J)$ του R.

(i) Αν το J είναι p - πρωταρχικό, τότε το J^c είναι p^c - πρωταρχικό ιδεώδες του R.

(ii) Αν
$$J = Q_1 \cap ... \cap Q_n,\ \sqrt{Q_i} = p_i \quad (1)$$
είναι πρωταρχική ανάλυση του J, τότε
$$J^c = {Q_1}^c \cap ... \cap {Q_n}^c,\ \sqrt{{Q_i}^c} = {p_i}^c \quad (2)$$
είναι πρωταρχική ανάλυση του J^c.

(iii) Υποθέτουμε ότι ο φ είναι επί. Δείξτε ότι αν η (1) είναι ελάχιστη πρωταρχική ανάλυση, τότε και η (2) είναι ελάχιστη πρωταρχική ανάλυση.

3.8. Έστω I ιδεώδες του R. Δείξτε τα εξής.

(i) Αν $\sqrt{I}$ μέγιστο, τότε το I είναι πρωταρχικό.

(ii) Αν $\mathfrak{m}^t \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}$ για κάποιο μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}$ και $t \geq 1$, τότε το I είναι $\mathfrak{m}$-πρωταρχικό.

(iii) Δείξτε ότι αν k είναι σώμα, τότε το ιδεώδες $((x-a)^m, (y-b)^n)$ του $k[x,y]$ είναι πρωταρχικό για κάθε $m, n > 0$ και $a, b \in k$.

1. Έστω k σώμα. Θεωρούμε τα ιδεώδη $I = (x,y)^2 = (x^2, xy, y^2)$ και $J = (x^2, xy)$ του $k[x,y]$.

3.9. Έστω k σώμα. Θεωρούμε τα ιδεώδη $I = (x, y)^2 = (x^2, xy, y^2)$ και $J = (x^2, xy)$ του $k[x, y]$.

(i) Δείξτε ότι το I είναι πρωταρχικό και όχι ανάγωγο παρατηρώντας ότι $I = (x, y^2) \cap (x^2, y)$.

(ii) Δείξτε ότι το $\sqrt{J}$ είναι πρώτο αλλά το J δεν είναι πρωταρχικό.

3.10. Έστω R δακτύλιος της Noether και I, J, Q ιδεώδη του R με Q πρωταρχικό και $IJ \subseteq Q$. Δείξτε ότι $I \subseteq Q$ ή υπάρχει ακέραιος n με $J^n \subseteq Q$.

3.11. Ποιο είναι το $\mathrm{Ass} I$, όπου I το μηδενικό ιδεώδες στο $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{24}$ ή $\mathbb{C}[x, y]/(xy)$;

3.12. Στο δακτύλιο $\mathbb{Z}[x]$, το ιδεώδες $(2, x)$ είναι μέγιστο, το $(4, x)$ είναι $(2, x)$ - πρωταρχικό χωρίς να είναι δύναμη του $(2, x)$.

3.13. Για k σώμα θεωρούμε τα ιδεώδη $p_1 = (x, y),\ p_2 = (x, z),\ m = (x, y, z)$ και $I = p_1 p_2$ του $k[x, y, z]$. Δείξτε ότι τα p_1, p_2 είναι πρώτα και το m μέγιστο. Στη συνέχεια δείξτε ότι μια ελάχιστη πρωταρχική ανάλυση του I είναι $I = p_1 \cap p_2 \cap m^2$. Ποιες συνιστώσες είναι μεμονωμένες και ποιες εμφυτευμένες;

3.14. Βρείτε μια ελάχιστη πρωταρχική ανάλυση του ιδεώδους $I = (xy, xz)$ του $\mathbb{Z}[x, y, z]$. Ποιες συνιστώσες είναι μεμονωμένες και ποιες εμφυτευμένες;

3.15. Βρείτε μια ελάχιστη πρωταρχική ανάλυση του ιδεώδους $I = (xy, xz, yz)$ του $\mathbb{Z}[x, y, z]$. Ποιες συνιστώσες είναι μεμονωμένες και ποιες εμφυτευμένες;

3.16. Έστω R δακτύλιος της Noether και I γνήσιο ιδεώδες του R. Δείξτε ότι αν $I = \sqrt{I}$, τότε το I δεν έχει εμφυτευμένη συνιστώσα.

3.17. Έστω R δακτύλιος και I γνήσιο ιδεώδες του R.

(i) Δείξτε ότι το σύνολο των πρώτων ιδεωδών του R που περιέχουν το I έχει ελάχιστο στοιχείο. Κάθε τέτοιο ιδεώδες λέγεται *ελάχιστο πρώτο ιδεώδες* του I.

(ii) Στο $\mathbb{Z}$ ποια είναι τα ελάχιστα πρώτα ιδεώδη του (24);

(iii) Δείξτε ότι αν ο R είναι της Noether, τότε το πλήθος των ελαχίστων πρώτων ιδεωδών του I είναι πεπερασμένο.

3.18. Έστω R δακτύλιος της Noether και I γνήσιο ιδεώδες του R. Δείξτε ότι αν $I = \sqrt{I}$, τότε

(i) το I δεν έχει εμφυτευμένη συνιστώσα, και

(ii) το I είναι τομή πεπερασμένου πλήθους πρώτων.

3.19. Δείξτε ότι κάθε δακτύλιος της Noether που δεν έχει μη μηδενικά μηδενοδύναμα στοιχεία, είναι ισόμορφος με υποδακτύλιο ευθέος γινομένου πεπερασμένου πλήθους περιοχών.

3.20. Δείξτε ότι κάθε επιμορφισμός δακτυλίων $R \to R$, όπου R της Noether, είναι ισομορφισμός.

3.21. Έστω R δακτύλιος της Noether που είναι περιοχή. Δείξτε ότι για κάθε μη αντιστρέψιμο $t \in R$, ισχύει

$$\bigcap_n (t^n) = (0).$$

3.22. Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν.

(i) Κάθε δακτύλιος της Noether που είναι και περιοχή, είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης.

(ii) Κάθε υποδακτύλιος σώματος είναι δακτύλιος της Noether.

(iii) Αν R, S είναι δακτύλιοι της Noether, τότε και ο $R \times S$ είναι δακτύλιος της Noether.

3.23 (Τοπολογία Zariski στο k^n)**.** Θεωρούμε αλγεβρικά κλειστό σώμα k και την τοπολογία Zariski στο k^n.

(i) Ποια είναι τα κλειστά σύνολα του k;

(ii) Δείξτε ότι κάθε δύο μη κενά ανοιχτά σύνολα του k^n έχουν μη κενή τομή. Αληθεύει ότι η τοπολογία Zariski είναι Hausdorff;

(iii) Αληθεύει ότι η τοπολογία Zariski του k^2 είναι το γινόμενο των τοπολογιών Zariski του k;

(iv) Κάθε πολυώνυμο $f \in k[x_1, ..., x_n]$ ορίζει την αντίστοιχη πολυωνυμική συνάρτηση $k^n \to k, P \mapsto f(P)$ που συμβολίζουμε πάλι με f. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

3.2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

3.1. Γνωρίζουμε από το Θεώρημα Βάσης του Hilbert ότι $R = k[x_1, \cdots, x_n]$ είναι της Noether, συνεπώς έχουμε ότι $(S) = (f_1, \cdots, f_n)$. Τότε, για κάθε $i = 1, \cdots, n$ υπάρχουν $f_{i,1}, \cdots, f_{i,m_i}$, ώστε

$$f_i = \sum_{j=1}^{m_i} g_j f_{i,j}.$$

Άρα, έχουμε ότι

$$(S) = (\{f_{i,j} \in S \mid j = 1, \cdots m_i,\ i = 1, \cdots, n\}).$$

Θέτοντας $S_0 = \{f_{i,j} \in S \mid i = 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots m_i\}$ έχουμε ότι S_0 είναι πεπερασμένο υποσύνολο του S και μάλιστα θα δείξουμε ότι $V(S) = V(S_0)$.

Αφού, $S_0 \subseteq S$ είναι σαφές ότι $V(S) \subseteq V(S_0)$. Αντίστροφα, αν $P \in V(S_0)$, τότε $f_{i,j}(P) = 0$, για κάθε $i = 1, \cdots, n$ και $j = 1, \cdots, m_i$, δηλαδή $f_i(P) = 0$, για κάθε $i = 1, \cdots, n$. Έτσι, από την αρχική σχέση έχουμε $f(P) = 0$, για κάθε $f \in S$.

3.2. Αν $R[x_1, \cdots, x_n]$ της Noether, τότε και κάθε πηλίκο του είναι της Noether. Μέσω του επιμορφισμού

$$\varphi\colon R[x_1, \cdots, x_n] \to R,\ f(x_1, \cdots, x_n) \mapsto f(0, \cdots, 0).$$

έχουμε ότι ο R είναι ισόμορφος με πηλίκο του $R[x_1, \cdots, x_n]$, άρα είναι της Noether.

3.3. (i) Αφού S είναι της Noether, από το Θεώρημα Βάσης τους Hilbert, έχουμε ότι $S[x, y]$ είναι της Noether. Επομένως, αφού $S[x, y]$ είναι της Noether και κάθε πηλίκο του είναι της Noether, άρα έχουμε ότι R είναι της Noether.

(ii) Μέσω του επιμορφισμού $\varphi\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[\sqrt{-3}],\ f(x) \mapsto f(\sqrt{-3})$ έχουμε ότι $Z[x]/\ker\varphi \simeq \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ και αφού $Z[x]/\ker\varphi$ είναι της Noether, ως πηλικό δακτυλίου της Noether, έχουμε ότι $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ είναι της Noether. Άρα, έχουμε ότι R είναι της Noether ως πηλίκο δακτυλίου της Noether.

(iii) Θεωρούμε τα σύνολα $I_n = \left\{f \in R \mid f(x) = 0,\ \forall x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]\right\}$, για $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Τώρα, θα δείξουμε ότι I_n ιδεώδη του R, για κάθε n. Έστω $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

- Έχουμε ότι $I_n \neq \emptyset$, αφού $f \equiv 0 \in I_n$.
- Αν $f, g \in I_n$ και $h \in R$ είναι σαφές ότι $f(x) + g(x) = h(x)f(x) = 0$, για κάθε $x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, άρα έχουμε ότι $f + g, hf \in I_n$.

Τώρα, παρατηρούμε ότι $I_j \subsetneqq I_{j+1}$, για κάθε $j \in \mathbb{Z}_{>0}$, αφού για παράδειγμα $f_{j+1} \in I_{j+1}$ και $f_{j+1} \notin I_j$, όπου

$$f_{j+1}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[-\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j+1}\right] \\ 1, & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Άρα, συμπεραίνουμε ότι R δεν είναι της Noether.

(iv) Έχουμε ότι ο δακτύλιος R είναι πεπερασμένου πλήθους n^n, άρα είναι σαφές ότι R είναι της Noether.

(v) Μέσω της απεικόνισης

$$\varphi\colon \mathbb{Z}[x] \to R,\ f(x) \mapsto f\left(x^2\right)$$

έχουμε ότι φ είναι επιμορφισμός, συνεπώς R είναι ισόμορφος με πηλίκο δακτυλίου της Noether, άρα είναι της Noether.

3.4. Αφού $k[x_1, \cdots, x_n]$ είναι της Noether έχουμε ότι $(\{f_n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}) = (g_1, \cdots, g_m)$. Έτσι, έχουμε ότι για κάθε $i = 1, \cdots, m$ ισχύει ότι

$$g_i(X) = \sum_{j=1}^{n_i} h_j(X) f_{\lambda_{ij}}(X).$$

Έτσι, είναι σαφές ότι $(\{f_n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}) = \left(\left\{f_{\lambda_{ij}} \mid j = 1, \cdots, n_i,\ i = 1, \cdots, m\right\}\right)$. Έστω $N = \max\{\lambda_{ij} \mid j = 1, \cdots, n_i,\ i = 1, \cdots, m,\} + 1$ και $m \geq N$. Αν $P \in X_m$, τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα $f_{\lambda_{ij}}(P) = 0$, για κάθε i, j, άρα προκύπτει ότι $f_m(P) = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

3.5. (i) Έχουμε ότι $xy \in (xy)$, όμως $x^n, y^m \notin (xy)$, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, άρα έχουμε ότι (xy) δεν είναι πρωταρχικό.

(ii) Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varphi\colon k[x,y] \to k[x],\ f(x,y) \mapsto f(x,x)\ ,$$

όπου είναι σαφές ότι είναι επιμορφισμός δακτυλίων. Τώρα, $(x-y) \subseteq \ker\varphi$ και θεωρούμε $g(y) = f(x,y) \in \ker\varphi$ με $g(y) \in k[x][y]$, θετικού βαθμού. Αφού $R = k[x]$ είναι περιοχή και $y - x \in R[y]$ είναι μονικό έχουμε ότι υπάρχουν $h \in R[y]$ και $r \in R$, ώστε

$$f(x,y) = g(y) = (y-x)h(y) + r \Rightarrow f(x,x) = r = 0.$$

Άρα, συμπεραίνουμε ότι $f \in (x-y)$, δηλαδή από το 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών έχουμε ότι $k[x,y]/(x-y) \simeq k[x]$, δηλαδή έχουμε ότι $(x-y)$ πρώτο, άρα και πρωταρχικό ιδεώδες του $k[x,y]$.

(iii) Αν $I = \big(x^2, x-y\big)$, παρατηρούμε ότι $(x,y) = (x, x-y) \subseteq \sqrt{I}$, όπου γνωρίζουμε ότι (x,y) είναι μέγιστο και μάλιστα $\sqrt{I} \subsetneqq k[x,y]$ (δείξτε ότι $1 \notin \sqrt{I}$), άρα έχουμε ότι $\sqrt{I} = (x,y)$. Αφού $\sqrt{I}$ είναι μέγιστο ιδεώδες του $k[x,y]$, από την Άσκηση 3.8, έχουμε ότι I είναι πρωταρχικό ιδεώδες του $k[x,y]$.

3.6. (i) Είναι σαφές ότι $(0), (p^n)$ για $n \geq 1$ είναι πρωταρχικά ιδεώδη του $\mathbb{Z}$.

Αντίστροφα, έστω $(m) \lhd \mathbb{Z}$ πρωταρχικό για κάποιο $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Έστω ότι m δεν είναι δύναμη πρώτου, συνεπώς $m = p^n q$, όπου p πρώτος και $(p,q) = 1$. Επομένως, έχουμε ότι $p + (m) \in \operatorname{div}(\mathbb{Z}/(m))$, αλλά $p + (m) \notin \operatorname{nil}(\mathbb{Z}/(m))$, το οποίο είναι άτοπο.

(ii) Έστω $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Αφού ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ είναι της Noether, έχουμε έχουμε ότι το ιδεώδες (n) επιδέχεται ελάχιστη πρωταρχική ανάλυση και από (i) έχουμε

$$(n) = \bigcap_{i=1}^{s} (p_i^{a_i}) = (p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}), \quad \sqrt{(p_i^{a_i})} = (p_i), \ i = 1, \cdots, s.$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $n = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$, όπου $p_1, \cdots, p_s$ διακεκριμένοι πρώτοι και $a_i \geq 1$. Από το 1ο Θεώρημα Μοναδικότητας και τη παραπάνω σχέση έπεται ότι αν $n = q_1^{b_1} \cdots q_m^{b_m}$, με q_i πρώτο, τότε $m = s$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $p_i = q_i$, για κάθε $i = 1, \cdots, s$. Από τα παραπάνω είναι σαφές ότι $a_i = b_i$, για κάθε $i = 1, \cdots, s$.

3.7. (i) Αρχικά θα δείξουμε ότι $\sqrt{J^c} = p^c$. Έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}
& r \in \sqrt{J^c} && \Leftrightarrow \\
& r^m \in J^c, \ m \in \mathbb{Z}_{>0} && \Leftrightarrow \\
& \varphi(r^m) \in J, \ m \in \mathbb{Z}_{>0} && \Leftrightarrow \\
& \big(\varphi(r)\big)^m \in J, \ m \in \mathbb{Z}_{>0} && \Leftrightarrow \\
& \varphi(r) \in p && \Leftrightarrow \\
& r \in p^c
\end{aligned}$$

Τώρα, είναι σαφές ότι J^c είναι γνήσιο ιδεώδες του R, αλλιώς $1_R \in J^c \Rightarrow 1_S = \varphi(1_R) \in J$, το οποίο είναι άτοπο, αφού J είναι πρωταρχικό. Θεωρούμε $ab \in J^c$, δηλαδή $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(ab) \in J$. Υποθέτουμε ότι $a \notin J^c$ και αφού J είναι πρωταρχικό έχουμε ότι $\varphi(b) \in p \Leftrightarrow b \in p^c$. Άρα, έχουμε ότι J^c είναι p^c - πρωταρχικό ιδεώδες του R.

(ii) Από (i) έχουμε ότι Q_i^c είναι p_i^c πρωταρχικό για κάθε $i = 1, \cdots, n$. Τώρα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$J^c = {Q_1}^c \cap \ldots \cap {Q_n}^c, \ \sqrt{{Q_i}^c} = {p_i}^c$$

Έστω $r \in \bigcap_{i=1}^n Q_i^c$, δηλαδή $\varphi(r) = q_i \in Q_i$, για κάθε $i = 1, \cdots, n$, άρα έχουμε ότι $\varphi(r) \in \bigcap_{i=1}^n Q_i = J \Rightarrow r \in J^c$. Αντίστροφα, έστω $r \in J^c$, δηλαδή $\varphi(r) \in J = \bigcap_{i=1}^n Q_i$.

Άρα, έχουμε ότι $\varphi(r) \in Q_i$, για κάθε $i = 1, \cdots, n$, άρα $r \in Q_i^c$, για κάθε i. Έτσι, είναι σαφές ότι $r \in \bigcap_{i=1}^n Q_i^c$.

(iii) Αρχικά αν

$$J = Q_1 \cap ... \cap Q_n, \ \sqrt{Q_i} = p_i$$

είναι μια ελάχιστη πρωταρχική ανάλυση του J έχουμε από (ii) ότι

$$J^c = {Q_1}^c \cap ... \cap {Q_n}^c, \ \sqrt{{Q_i}^c} = {p_i}^c$$

είναι πρωταρχική ανάλυση του J^c και αρκεί να δείξουμε ότι είναι ελάχιστη.

- Αρχικά για $i \neq j$ πρέπει να δείξουμε ότι $p_i^c \neq p_j^c$. Έστω $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ με $i \neq j$. Τότε, γνωρίζουμε ότι $p_i \neq p_j$, αφού η παραπάνω πρωταρχική ανάλυση του J είναι ελάχιστη. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι υπάρχει $s \in p_i$ και $s \notin p_j$ και αφού φ είναι επί υπάρχει $r \in R$, ώστε $\varphi(r) = s$. Συνεπώς, έχουμε ότι $r \in p_i^c$ και $r \notin p_j^c$, άρα $p_i \neq p_j$.
- Τέλος πρέπει να δείξουμε ότι, για $i \in \{1, \cdots, n\}$, τότε $J^c \neq \bigcap_{j \neq i} Q_j^c$. Πράγματι, λόγω της παραπάνω ελάχιστης ανάλυσης του J, έχουμε ότι $J \neq \bigcap_{j \neq i} Q_j$, δηλαδή υπάρχει $s \in \bigcap_{j \neq i} Q_j$ και $s \notin J$. Αφού φ είναι επί έχουμε ότι υπάρχει $r \in R$, ώστε $\varphi(r) = s$, άρα $r \notin J^c$ και $r \in \bigcap_{j \neq i} Q_j^c$ και έχουμε το ζητούμενο.

3.8. (i) Έστω $ab \in I$ με $a \notin I$. Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι $b \notin \sqrt{I}$ και αφού $\sqrt{I}$ είναι μέγιστο έχουμε ότι $(b) + \sqrt{I} = R$. Άρα, υπάρχει $i \in \sqrt{I}$ και $r \in R$ ώστε $1_R = i + rb$. Τώρα, αφού $i \in \sqrt{I}$ υπάρχει $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ώστε $i^n \in I$. Συνεπώς έχουμε ότι

$$1_R = 1_R^n = (i + rb)^n = i^n + sb, \quad s \in R.$$

Έτσι, προκύπτει ότι $a = ai^n + sab \in I$, το οποίο είναι άτοπο.

(ii) Παίρνοντας ριζικά στην ανισότητα προκύπτει ότι $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ και από (i) έχουμε το ζητούμενο.

(iii) Για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ έχουμε ότι

$$\sqrt{((x-a)^m, (y-b)^n)} = (x-a, y-b) \ ,$$

το οποίο είναι μέγιστο στο $k[x, y]$, συνεπώς από (i) έχουμε το ζητούμενο.

3.9. (i) Παρατηρούμε ότι $\sqrt{(x,y)^2} = (x,y)$ το οποίο είναι μέγιστο στο $k[x,y]$, άρα από Άσκηση 3.8 έχουμε ότι I είναι πρωταρχικό.

Παρατηρούμε ότι $I = (x,y^2) \cap (x^2,y)$ και μάλιστα $x,y \notin I$, άρα έχουμε ότι $I \subsetneq (x^2,y),(x,y^2)$, συνεπώς το I δεν είναι ανάγωγο. Θα δείξουμε ενδεικτικά ότι $y \notin I$. Αν $y \in I$, τότε υπάρχουν $f,g,h \in k[x,y]$, ώστε

$$y = f(x,y)x^2 + g(x,y)xy + h(x,y)y^2$$

και για $x = 0$, έχουμε ότι $1 = h(x,y)y$, όπου θέτοντας $y = 0$ καταλήγουμε σε άτοπο.

(ii) Έχουμε ότι

$$(x^2) \subseteq J \subseteq (x) \Rightarrow (x) \subseteq \sqrt{J} \subseteq (x) \Rightarrow \sqrt{J} = (x)\ ,$$

συνεπώς το $\sqrt{J} = (x)$ είναι πρώτο.

Το J δεν ειναι πρώταρχικό, αφού $xy \in J$, αλλά $x^n, y^n \notin J$ για $n \geq 1$. Ενδεικτικά θα δείξουμε ότι για $n \geq 1$ ισχύει $y^n \notin J$. Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι υπάρχουν $f,g \in k[x,y]$, ώστε

$$y^n = f(x,y)x^2 + g(x,y)xy$$

όπου για $x = 0$ καταλήγουμε σε άτοπο.

3.10. Αφού R είναι της Noether έχουμε ότι $J = (b_1,\cdots,b_n)$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει $i \in I$ ώστε $i \notin Q$. Αφού $IJ \subseteq Q$, έχουμε ότι $ib_j \in Q$, για κάθε $j = 1,\cdots,n$ και αφού Q είναι πρωταρχικό έχουμε ότι $b_j \in \sqrt{Q}$, για κάθε j. Συνεπώς υπάρχουν $m_j \geq 1$, ώστε $b_j^{m_j} \in Q$, για κάθε $j = 1,\cdots,n$.

Έστω $m = \sum_{j=1}^{n} m_j$. Θα δείξουμε ότι $J^m \subseteq Q$. Έστω $\sum_{i=1}^{\lambda} j_{i_1}\cdots j_{i_m} \in J^m$ με $j_{i_k} \in J$, για κάθε $k = 1,\cdots,m$, δηλαδή είναι γραμμικός συνδυασμός κάποιων από τα $b_1,\cdots,b_n$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{\lambda}\prod_{j=1}^{m} j_{i_j} = \sum_{i=1}^{\lambda}\sum_{k_{i,1}+\cdots+k_{i,n}=m} x(k_{i.1},\cdots,k_{i,n}) b_1^{k_{i,1}}\cdots b_n^{k_{i,n}}.$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει n-αδα $(k_{i,1},\cdots,k_{i,n})$, ώστε $\sum_j k_{i,j} = m$ και $k_{i,j} < m_j$ για κάθε j, καταλήγουμε σε άτοπο από τον ορισμό του m. Συνεπώς, για κάθε τέτοια n-άδα υπάρχει $k_{i,j}$, ώστε $m_j \leq k_{i,j} \Rightarrow b_j^{k_{i,j}} \in Q$ και συμπεραίνουμε ότι $J^m \subseteq Q$.

3.11.

3.12. Έχουμε διαδοχικά ότι

$$\frac{\mathbb{Z}[x]}{(2,x)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[x]/(2)}{(2,x)/(2)} \simeq \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x)} \simeq \mathbb{Z}_2$$

Αφού το $\mathbb{Z}_2$ είναι σώμα έχουμε ότι $(2,x)$ είναι μέγιστο ιδεώδες του $\mathbb{Z}_2$.

Τώρα, θα δείξουμε ότι $\sqrt{(4,x)} = (2,x)$. Είναι άμεσο ότι $(2,x) \subseteq \sqrt{(4,x)}$. Έστω $f \in \sqrt{(4,x)}$, δηλαδή υπάρχει $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ώστε $f^n \in (4,x)$. Άρα, υπάρχουν $g,h \in \mathbb{Z}[x]$ ώστε

$$f^n(x) = 4h(x) + xg(x) \Rightarrow f^n(0) = 4h(0).$$

- Αν $h(0) = 0$, τότε $x|f^n \Rightarrow x|f$, άρα $f \in (2,x)$.
- Αν $h(0) \neq 0$, τότε $f^n(0)|4 \Rightarrow f(0)|2 \Rightarrow f \in (2,x)$.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν έχουμε ότι $f \in (2,x)$ και έχουμε ότι $\sqrt{(4,x)} = (2,x)$. Από την Άσκηση 3.8 έχουμε ότι $(4,x)$ είναι πρωταρχικό.

Αρχικά είναι σαφές ότι $(4,x) \subsetneqq (2,x)$. Τώρα, έχουμε ότι $x \notin (2,x)^2 = (x^2, 2x, 4)$, καθώς αν $x \in (2,x)^2$, τότε υπάρχουν $f,g,h \in \mathbb{Z}[x]$, ώστε

$$x = f(x)x^2 + 2g(x)x + 4h(x) \Rightarrow 4h(0) = 0.$$

Συνεπώς θα ισχύει ότι $x|h(x) \Rightarrow h(x) = x^k h'(x)$ με $(x, h'(x)) = 1$, άρα έχουμε ότι

$$1 = xf(x) + 2g(x) + 4x^k h'(x)$$

όπου για $x = 0$ καταλήγουμε σε άτοπο. Τώρα, αφού $(2,x)^n \subseteq (2,x)^2$, για κάθε $n \geq 2$, έχουμε το ζητούμενο.

3.13. Με χρήση των ομομορφισμών $f(x,y,z) \mapsto f(0,0,z)$ και $f(x,y,z) \mapsto f(0,y,0)$ έχουμε ότι

$$\frac{k[x,y,z]}{(x,y)} \simeq k[z] \quad \text{και} \quad \frac{k[x,y,z]}{(x,z)} \simeq k[y]$$

με $k[z], k[y]$ ακέραιες περιοχές, άρα έχουμε ότι $(x,y), (x,z)$ είναι πρώτα ιδεώδη του $k[x,y,z]$. Επίσης έχουμε ότι $k[x,y,z]/\mathfrak{m} \simeq k$ με k σώμα, άρα $\mathfrak{m}$ είναι μέγιστο.

Είναι σαφές ότι p_1 και p_2 είναι πρωταρχικά ως πρώτα και $\mathfrak{m}^2$ είναι πρωταρχικό, αφού $\sqrt{\mathfrak{m}^2} = \mathfrak{m}$ μέγιστο, από Άσκηση 3.8. Επίσης έχουμε ότι

$$p_1 \cap p_2 \cap \mathfrak{m}^2 = (x,y) \cap (x,z) \cap (x^2, xy, yz, xz, , y^2, z^2) = (x^2, xy, xz, yz) = p_1 p_2 = I$$

Η ανάλυση σαφές ότι είναι ελάχιστη, αφού τα παραπάνω ριζικά είναι διακεκριμένα και

$$p_1 \cap p_1 = (x, yz), p_1 \cap m^2 = (x^2, xy, yz, xz, y^2), p_2 \cap m^2 = (x^2, xz, xy, yz, z^2) \neq I.$$

Τώρα, έχουμε ότι $\mathrm{Ass} I = \{p_1, p_2, \mathfrak{m}\}$ με τα p_1 και p_2 να είναι μη-συγκρίσιμα άρα και ελάχιστα στο $\mathrm{Ass} I$ και $p_1, p_2 \subsetneqq \mathfrak{m}$, άρα οι συνιστώσες p_1, p_2 είναι μεμονωμένες και η $\mathfrak{m}^2$ είναι εμφυτευμένη.

3.14. Παρατηρούμε ότι $I = (xy, xz) = (x) \cap (y, z)$ είναι μια ελάχιστη πρωταρχική ανάλυση με $(x), (y, z)$ πρώτα στο $\mathbb{Z}[x, y, z]$. Μάλιστα στο σύνολο $\mathrm{Ass}I = \{(x), (y, z)\}$ τα στοιχεία είναι ελάχιστα, άρα και οι δύο συνιστώσες είναι μεμονωμένες.

3.15. Με χρήση αλγεβρικών συνόλων $(V(I))$ οδηγούμαστε στον ακόλουθο ισχυρισμό.

Ισχυρισμός 2. Μια πρωταρχική ανάλυση του $I = (xy, xz, yz)$ είναι η $I = (x, y) \cap (x, z) \cap (z, y)$.

Αφού $xy, xz, yz \in (x, y) \cap (x, z) \cap (z, y)$ έχουμε ότι $I \subseteq (x, y) \cap (x, z) \cap (z, y)$. Αντίστροφα, αν $f \in (x, y) \cap (x, z) \cap (z, y)$, τότε έχουμε ότι

$$f(x, y, z) = g_1(x, y, z)x + g_2(x, y, z)y \in (x, z) \cap (z, y).$$

Τώρα, αφού $f, g_2(x, y, z)y \in (z, y) \Rightarrow g_1(x, y, z)x \in (z, y) \cap (x) \Rightarrow g_1(x, y, z)x \in (xz, xy)$. Ομοίως δείχνουμε ότι $g_2(x, y, z)y \in (xy, yz)$. Συνεπώς, έχουμε ότι $g_1(x, y, z)x, g_2(x, y, z)y \in I \Rightarrow f \in I$ και έχουμε αποδείξει τον ισχυρισμό.

Τέλος, είναι σαφές ότι η ανάλυση του ισχυρισμού είναι πρωταρχική, αφού τα ιδεώδη $(x, y), (x, z), (z, y)$ είναι πρώτα, (τα αντίστοιχα πηλίκα είναι ακέραιες περιοχές) και μάλιστα είναι ελάχιστη.

Πράγματι, $\mathrm{Ass}I = \{(x, y), (x, z), (z, y)\}$ με τα στοιχεία να είναι μη συγκρίσιμα (ως προς τη σχέση περιέχεσθαι), άρα και ελάχιστα στο $\mathrm{Ass}I$ και ισχύει ότι

$$I \neq (x, y) \cap (x, z) = (x, yz), (x, y) \cap (y, z) = (xz, y), (x, z) \cap (y, z) = (xy, z)$$

αφού $x, y, z \notin I$. Από την παραπάνω πατηρήρηση έχουμε επίσης ότι όλες οι συνιστώσες είναι μεμονωμένες.

3.16. Αφού R της Noether το ιδεώδες I επιδέχεται πρωταρχική ανάλυση

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n, \quad \sqrt{Q_i} = \mathfrak{p}_i.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_m$ τα ελάχιστα στοιχεία του $\mathrm{Ass}I$. Τότε, έχουμε ότι

$$I = \sqrt{I} = \sqrt{Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n} = \sqrt{Q_1} \cap \cdots \cap \sqrt{Q_n} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_m.$$

Τα $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_m$ είναι πρώτα και μάλιστα συμπεράναμε ότι $\mathrm{Ass}I = \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_m\}$, όπου όλα τα στοιχεία είναι ελάχιστα, άρα κάθε συνιστώσα είναι μεμονωμένη.

3.17. (i) Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{p} \lhd R \mid I \subseteq \mathfrak{p} \text{ και } \mathfrak{p} \text{ πρώτο}\}.$$

Είναι σαφές ότι $\mathfrak{A} \neq \emptyset$, αφού γνωρίζουμε ότι κάθε ιδεώδες περιέχεται σε μέγιστο ιδεώδες. Ορίζουμε διάταξη $\prec$ στο $\mathfrak{A}$, ως εξής

$$\mathfrak{p}_1 \prec \mathfrak{p}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_1.$$

Είναι άμεσο ότι το ζεύγος $(\mathfrak{A}, \prec)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος. Θεωρούμε $\{\mathfrak{p}_i\}_{i\in I}$ αλυσίδα στον $\mathfrak{A}$. Θέτουμε $\mathfrak{p} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{p}_i$ το οποίο είναι είναι άνω φράγμα της παραπάνω αλυσίδας.

Από το Λήμμα του Zorn, έχουμε ότι το $\mathfrak{A}$ έχει μεγιστικό στοιχείο με τη διάταση $\prec$, δηλαδή ελάχιστο στοιχείο (ως προς τη σχέση ''περιέχεσθαι'').

(ii) Αρχικά έχουμε ότι $(24) \subseteq (n)$ αν και μόνο αν $n = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ και από την Άσκηση 2.1 έχουμε ότι τα μόνα πρώτα είναι τα $(2), (3)$ και οποία είναι και ελάχιστα, αφού $(2) \nsubseteq (3)$ και $(3) \nsubseteq (2)$.

(iii) Αφού R είναι της Noether υπάρχουν $Q_1, \cdots, Q_n$ πρωταρχικά ιδεώδη ώστε

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n, \quad \sqrt{Q_i} = \mathfrak{p}_i.$$

Έστω $\mathfrak{p}$ ελάχιστο πρώτο ιδεώδες του I, άρα έχουμε ότι

$$I \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \sqrt{I} \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n \subseteq \mathfrak{p}.$$

Αφού το $\mathfrak{p}$ είναι πρώτο, τότε υπάρχει $i \in \{1, \cdots, n\}$, ώστε $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}$ με $I \subseteq \mathfrak{p}_i$ και λόγω της ελαχιστικότητας του $\mathfrak{p}$ έχουμε ότι $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$. Έτσι, έχουμε το ζητούμενο.

3.18. Η λύση δίνεται από την Άσκηση 3.16 .

3.19. Έστω R της Noether ώστε $\mathrm{nil}(R) = (0) \lhd R$, συνεπώς υπάρχουν $Q_1, \cdots, Q_n$ πρωταρχικά ώστε

$$(0) = \mathrm{nil}(R) = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n, \quad \sqrt{Q_i} = \mathfrak{p}_i \Rightarrow \mathrm{nil}(R) = \sqrt{(0)} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n.$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n = (0)$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varphi\colon R \to R/\mathfrak{p}_1 \times \cdots \times R/\mathfrak{p}_n, \; r \mapsto (r + (\mathfrak{p}_1), \cdots, r + (\mathfrak{p}_n))$$

η οποία με βάση την παραπάνω παρατήρηση είναι μονομορφισμός, άρα R είναι ισόμορφος με υποδακτύλιο ευθέος γινομένου πεπερασμένου πλήθους περιοχών.

3.20. Έστω $f\colon R \to R$ επιμορφισμός δακτυλίων. Τότε, έχουμε την εξής ακολουθία ιδεωδών

$$\ker f \subseteq \ker f^2 \subseteq \ker f^3 \subseteq \cdots$$

και αφού R είναι της Noether υπάρχει $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, ώστε $\ker f^n = \ker f^{n+1}$. Επαγωγικά είναι σαφές ότι για κάθε n η απεικόνιση f^n είναι επιμορφισμός δακτυλίων.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\ker f = \{0\}$. Έστω $r \in \ker f$ και από τη προηγούμενη παρατήρηση υπάρχει $r_n \in R$, ώστε $f^n(r_n) = r \Rightarrow f^{n+1}(r_n) = 0 \Rightarrow r_n \in \ker f^{n+1} = \ker f^n$. Άρα, έχουμε ότι $f^n(r_n) = r = 0$ και έχουμε δείξει το ζητούμενο.

3.21. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $r \neq 0$ ώστε $r \in \bigcap_n (t^n)$, συνεπώς υπάρχουν $r_i \in R \setminus \{0\}$, ώστε

$$r = r_1 t = r_2 t^2 = \cdots \Rightarrow (r) \subseteq (r_1) \subseteq (r_2) \subseteq \cdots$$

Αφού R είναι της Noether έχουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, ώστε $(r_n) = (r_{n+1})$, δηλαδή υπάρχει $u \in U(R)$, ώστε $r_{n+1} = u r_n$. Έτσι, έχουμε ότι

$$r = r_n t^n = r_{n+1} t^{n+1} = u r_n t^{n+1} \Rightarrow ut = 1 \Rightarrow t \in U(R),$$

όπου η τελευταία σχέση προκύπτει αφού R περιοχή, και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

3.22. (i) Στην Άσκηση 3.3 (ii) έχει αποδειχθεί ότι $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ είναι δακτύλιος της Noether, αλλά από την Άσκηση 2.16 έχουμε ότι $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ δεν είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης ενώ είναι περιοχή. Συνεπώς ο ισχυρισμός είναι **λανθασμένος**.

(ii) Έχει αποδειχθεί ότι η ακέραια περιοχή $R = \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n, \cdots]$ δεν είναι της Noether και ότι R μπορεί να εμφυτευτεί στο σώμα $\mathrm{Frac}(R)$, δηλαδή να θεωρηθεί ως υποδακτύλιος του σώματος των κλασμάτων του. Συνεπώς ο ισχυρισμός είναι **λανθασμένος**.

(iii) Θεωρούμε

$$I_1 \times J_1 \subseteq I_2 \times J_2 \subseteq \cdots$$

αύξουσα ακολουθία ιδεωδών στον $R \times S$. Συνεπώς, έχουμε ότι $I_i \subseteq I_{i+1}$ και $J_i \subseteq J_{i+1}$, για κάθε $i = 1, 2, \cdots$. Όμως, R και S είναι της Noether, συνεπώς υπάρχουν $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, ώστε $I_n = I_{n+1} = \cdots$ και $J_m = J_{m+1} = \cdots$, όπου θεωρώντας $k = \max\{n, m\}$ παίρνουμε ότι $I_k \times J_k = I_{k+1} \times J_{k+1} = \cdots$, συνεπώς ο $R \times S$ είναι της Noether. Συνεπώς ο ισχυρισμός είναι **σωστός**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΤΟΠΙΚΟΠΟΙΗΣΗ

4.1 Ασκήσεις

4.1. Έστω S πολλαπλασιαστικό υποσύνολο του R. Τότε $S^{-1}R = 0$ αν και μόνο αν το S περιέχει μηδενοδύναμο στοιχείο.

4.2. Έστω R δακτύλιος, S πολλαπλασιαστικό υποσύνολο του R και I, J ιδεώδη του R. Δείξτε τις εξής ισότητες.

(i) $S^{-1}(I + J) = S^{-1}I + S^{-1}J$.

(ii) $S^{-1}(I \cdot J) = S^{-1}I \cdot S^{-1}J$.

(iii) $S^{-1}(I \cap J) = S^{-1}I \cap S^{-1}J$.

(iv) $S^{-1}\sqrt{I} = \sqrt{S^{-1}I}$.

(v) $S^{-1}(\mathrm{nil}(R)) = \mathrm{nil}(S^{-1}R)$.

4.3. Υπολογίστε τους τοπικούς δακτύλιους $R_{\mathfrak{p}}$ για κάθε πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{p}$ του $R = \mathbb{Z}_6$.

4.4. Αληθεύει ότι αν ο δακτύλιος $R_{\mathfrak{p}}$ είναι περιοχή για κάθε $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$, τότε ο R είναι περιοχή;

4.5. Έστω R μη μηδενικός δακτύλιος τέτοιος ώστε κάθε τοπικοποίηση $R_{\mathfrak{p}}$, όπου $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$, δεν έχει μη μηδενικό μηδενοδύναμο στοιχείο. Δείξτε ότι και ο R δεν έχει μη μηδενικό μηδενοδύναμο στοιχείο.

4.6. Έστω k σώμα. Θεωρούμε το δακτύλιο $k[x, x^{-1}]$ των πολυωνύμων Laurent. Είδαμε στο μάθημα ότι

$$k[x, x^{-1}] = S^{-1}(k[x]),$$

όπου $S = \{1, x, x^2, \cdots\}$. Δείξτε ότι ο $k[x, x^{-1}]$ είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών χρησιμοποιώντας το προηγούμενο γεγονός.

4.7. Έστω $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$ και $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ το μέγιστο ιδεώδες του $R_{\mathfrak{p}}$. Δείξτε ότι ο δακτύλιος πηλίκο $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{m}$ είναι ισόμορφος με το σώμα πηλίκων της περιοχής $R/\mathfrak{p}$.

4.8. Θεωρούμε το δακτύλιο $R = \mathbb{Z}[x]$ και το πολλαπλασιαστικό υποσύνολο $S = \{1, 2, 2^2, ...\}$. Αληθεύει ότι ο δακτύλιος $S^{-1}R$ είναι της Noether; Περιοχή κυρίων ιδεωδών;

4.9. Υπάρχει υποδακτύλιος του $\mathbb{Q}$ που δεν είναι της Noether;

4.2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

4.1. Έχουμε ότι $S^{-1}R = 0$ αν και μόνο αν $\frac{1}{1} = \frac{0}{1}$ αν και μόνο αν υπάρχει $u \in S$ τέτοιο ώστε $u = 0$ αν και μόνο αν $0 \in S$. Τώρα, αφού το S είναι πολλαπλασιαστικό, έχουμε ότι τα προηγούμενα είναι ισοδύναμα με ότι το S περιέχει μηδενοδύναμο στοιχείο.

4.2. (i) Αν $r \in S^{-1}(I+J)$, τότε έχουμε ότι $r = \dfrac{i+j}{s}$ με $i \in I, j \in J$ και $s \in S$. Συνεπώς, έχουμε ότι $a = \dfrac{i+j}{s} = \dfrac{i}{s} + \dfrac{j}{s'} \in S^{-1}I + S^{-1}J$.

Αντίστροφα, αν $r \in S^{-1}I + S^{-1}J$, τότε είναι της μορφής $r = \dfrac{i}{s} + \dfrac{j}{s} = \dfrac{s'i + sj}{ss'}$ με $s'i \in I, sj \in J$ και $ss' \in S$, άρα έχουμε ότι $r \in S^{-1}(I+J)$.

(ii) Θεωρούμε $r \in S^{-1}(I \cdot J)$, συνεπώς είναι της μορφής $r = \dfrac{\sum_{k=1}^n i_k j_k}{s}$ με $i_k \in I, j_k \in J$, για κάθε $k = 1, \cdots, n$ και $s \in S$. Συνεπώς, έχουμε ότι

$$r = \frac{\sum_{k=1}^n i_k j_k}{s} = \sum_{k=0}^n \frac{i_k}{s} \cdot \frac{j_k}{1} \in S^{-1}I \cdot S^{-1}J.$$

Αντίστροφα, έστω $r \in S^{-1}I \cdot S^{-1}J$, δηλαδή έχουμε ότι

$$r = \sum_{k=1}^n \frac{i_k}{s_k} \cdot \frac{j_k}{s'_k} = \sum_{k=1}^n \frac{i_k j_k}{s_k s'_k} = \frac{\sum_{k=1}^n (a_k i_k)(b_k j_k)}{s} \in S^{-1}(I \cdot J) ,$$

όπου $s = \prod_{k=1}^n s_k s'_k$, $a_k, b_k \in R$ και $i_k \in I, j_k \in J$, για κάθε $k = 1, \cdots, n$.

(iii) Έστω $a \in S^{-1}(I \cap J)$, άρα το a είναι της μορφής $r = \frac{r}{s}$ με $r \in I \cap J$ και $s \in S$. Συνεπώς, είναι σαφές ότι $a \in S^{-1}I \cap S^{-1}J$.

Αντίστροφα, έστω $r \in\in S^{-1}I \cap S^{-1}J \Rightarrow r = \dfrac{i}{s} = \dfrac{j}{s'}$ με $i \in I, j \in J$ και $s, s' \in S$. Συνεπώς, υπάρχει $u \in S$, ώστε $us'i = usj \in I \cap J$. Επομένως, έχουμε ότι $r = \dfrac{us'i}{s'us} \in S^{-1}(I \cap J)$.

(iv) Έστω $a \in S^{-1}\sqrt{I} \Rightarrow a = \frac{r}{s}$ με $r \in \sqrt{I}$ και $s \in S$. Άρα, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, ώστε $r^n \in I$, δηλαδή $\left(\dfrac{r}{s}\right)^n = \dfrac{r^n}{s^n} \in S^{-1}I \Rightarrow \dfrac{r}{s} \in \sqrt{S^{-1}I}$.

Αντίστροφα, Έστω $\frac{r}{s} \in \sqrt{S^{-1}I} \Rightarrow \left(\frac{r}{s}\right)^n = \frac{r^n}{s^n} \in S^{-1}I$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Άρα, έχουμε ότι $\frac{r^n}{s^n} = \frac{i}{s'}$ για $i \in I$ και $s' \in S$. Επομένως, υπάρχει $u \in S$, ώστε $s'ur^n = s^n ui \in I$. Έτσι, έχουμε ότι

$$\left(\frac{r}{s}\right)^n = \left(\frac{rus'}{sus'}\right)^n = \frac{r^n u^n s'^n}{s^n s'^n u^n} \in S^{-1}I ,$$

αφού $r^n u^n s'^n \in I$. Άρα, έχουμε ότι $\frac{r}{s} \in S^{-1}\sqrt{I}$.

(v) Έστω $\frac{r}{s} \in S^{-1}(\mathrm{nil}(R)) \Rightarrow \frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$ με $r' \in \mathrm{nil(R)}$ και $s' \in S$, άρα $r'^n = 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Άρα, έχουμε ότι $\left(\frac{r}{s}\right)^n = \left(\frac{r'}{s'}\right)^n = 0 \Rightarrow \frac{r}{s} \in \mathrm{nil}(S^{-1}R)$.

Αντίστροφα, έστω $\frac{r}{s} \in \mathrm{nil}(S^{-1}R) \Rightarrow \left(\frac{r}{s}\right)^n = \frac{0}{1}$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή υπάρχει $u \in S$, ώστε $ur^n = 0$. Συνεπώς, έχουμε ότι $(ru)^n = 0$, άρα προκύπτει ότι $\frac{r}{s} = \frac{ru}{su} \in S^{-1}(\mathrm{nil}(R))$.

4.3. Από την Άσκηση 2.1 έχουμε ότι τα μοναδικά πρώτα ιδεώδη του $R = \mathbb{Z}_6$ είναι τα $\mathfrak{p}_1 = 3\mathbb{Z}_6$ και $\mathfrak{p}_2 = 2\mathbb{Z}_6$.

- $R_{\mathfrak{p}_1} = \left\{\frac{[n]}{[m]} \mid n = 0, \cdots, 5,\ m = 1, 2, 4, 5\right\}$
- $R_{\mathfrak{p}_2} = \left\{\frac{[n]}{[m]} \mid n = 0, \cdots, 5,\ m = 1, 3, 5\right\}$

4.4. Με τους συμβολισμούς της Άσκησης 4.3 θα δείξουμε ότι $\mathfrak{m}_i = (0)$, όπου $\mathfrak{m}_i$ το αντίστοιχο μέγιστο ιδεώδες του $R_{\mathfrak{p}_i}$. Θα το δείξουμε για $i = 1$ και η περίπτωση του $i = 2$ αποδεικνύεται όμοια. Έχουμε ότι $\mathfrak{m}_1 = \left\{\frac{[n]}{[m]} \mid n = 0, 3,\ m = 1, 2, 4, 5\right\}$, άρα για κάθε $[n] = [0], [3]$ υπάρχει $[m] \in R \setminus \mathfrak{p}_1$, ώστε $[m][n] = [0]$. Συνεπώς, έχουμε ότι $\mathfrak{m}_1 = (0)$, δηλαδή $R_{\mathfrak{p}_1}/\mathfrak{m}_1 \simeq R_{\mathfrak{p}_1}$.

Έτσι, έχουμε ότι $R_{\mathfrak{p}_1}, R_{\mathfrak{p}_2}$ είναι περιοχές και ότι $R = \mathbb{Z}_6$ δεν είναι περιοχή, συνεπώς ο ισχυρισμός δεν αληθεύει.

4.5. Έστω ότι υπάρχει $r \in \mathrm{nil}(R) \setminus \{0\}$, δηλαδή υπάρχει $n\mathbb{N}$, ώστε $r^n = 0$. Θεωρούμε $\mathrm{Ann}(r) = \{x \in R \mid rx = 0\}$ και γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\mathfrak{m}$, μέγιστο ιδεώδες του R, ώστε $\mathrm{Ann}(r) \subseteq \mathfrak{m}$.

Θεωρούμε την τοπικοποίηση $R_{\mathfrak{m}}$, όπου έχουμε ότι $\left(\frac{r}{1}\right)^n = 0 \Rightarrow \frac{r}{1} \in \mathrm{nil}(R_{\mathfrak{m}}) = (0)$. Έτσι, έχουμε ότι υπάρχει $u \in R \setminus \mathfrak{m}$, ώστε $ur = 0 \Rightarrow u \in \mathrm{Ann}(r) \subseteq \mathfrak{m}$, το οποίο είναι άτοπο.

4.6. Έστω $J \triangleleft k[x, x^{-1}] \Rightarrow J^c \triangleleft k[x]$. Όμως, $k[x]$ είναι περιοχή κύριων ιδεωδών, άρα υπάρχει $f(x) \in k[x]$, ώστε $J^c = (f(x)) \Rightarrow J^{ce} = S^{-1}((f(x))) = \left(\frac{f(x)}{1}\right)$. Όμως γνωρίζουμε ότι $J^{ce} = J \Rightarrow J = \left(\frac{f(x)}{1}\right)$, συνεπώς έχουμε ότι $k[x, x^{-1}]$ είναι περιοχή κύριων ιδεωδών.

4.7. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varphi\colon R_{\mathfrak{p}} \to \mathrm{Frac}\left(R/\mathfrak{p}\right),\ \frac{a}{b} \mapsto \frac{a + (\mathfrak{p})}{b + (\mathfrak{p})}.$$

- Αρχικά θα δείξουμε ότι φ είναι καλά ορισμένη. Για $\frac{a}{b} \in R_{\mathfrak{p}} \Rightarrow b \notin \mathfrak{p} \Rightarrow b + (\mathfrak{p}) \neq (\mathfrak{p})$. Επίσης, έχουμε ότι αν $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ ώστε $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, δηλαδή υπάρχει $u \notin \mathfrak{p}$, ώστε $u(ad - bc) \in \mathfrak{p}$. Αφού $\mathfrak{p}$ είναι πρώτο έχουμε ότι $ad - bc \in \mathfrak{p} \Rightarrow \frac{a+(\mathfrak{p})}{b+(\mathfrak{p})} = \frac{c+(\mathfrak{p})}{d+(\mathfrak{p})}$.
- Η φ είναι επί. Έστω $\frac{a+(\mathfrak{p})}{b+(\mathfrak{p})} \in \operatorname{Frac}(R/\mathfrak{p})$, με $b + (\mathfrak{p}) \neq (\mathfrak{p}) \Rightarrow b \notin \mathfrak{p} \Rightarrow \varphi\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a+(\mathfrak{p})}{b+(\mathfrak{p})}$.
- Είναι άμεσο ότι φ είναι ομομορφισμός και μάλιστα $\ker\varphi = \mathfrak{m}$.

Άρα, από το 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών έχουμε ότι $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{m} \simeq \operatorname{Frac}(R/\mathfrak{p})$.

4.8. Έχουμε ότι $\mathbb{Z}$ είναι της Noether, άρα και $S^{-1}R$ της Noether. Αν $R' = S^{-1}\mathbb{Z}$, τότε θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varphi\colon S^{-1}R \to R'\mathbb{Z}[x],\ \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{2^n} \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{2^n} x^i.$$

Είναι σαφές ότι φ είναι ισομορφισμός, άρα αρκεί να εξετάσουμε αν $R'\mathbb{Z}[x]$ είναι περιοχή κύριων ιδεωδών.

Θεωρούμε $(3, x) \lhd R'\mathbb{Z}[x]$ και υποθέτουμε ότι $(3, x) = (f(x)) \Rightarrow 3 = f(x)g(x) \Rightarrow 3 = \frac{a}{2^n} \cdot \frac{b}{2^m}$, αφού R' είναι περιοχή, με $f(x) = \frac{a}{2^n}$ και $(a, 2^n) = 1$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $f(x) = 1$ ή $f(x) = 3$.

Προφανώς $(3, x) \neq R'\mathbb{Z}[x]$, και αν $f(x) = 3$ έχουμε ότι $x \in (3, x) \Rightarrow x = 3g(x)$. Έτσι, έχουμε ότι $g(x) = \gamma x$ με $\gamma \in R'$, άρα $\gamma = \frac{1}{3} \notin R'$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς έχουμε ότι $R'\mathbb{Z}[x]$ δεν είναι περιοχή κύριων ιδεωδών, άρα και $S^{-1}R$ δεν είναι περιοχή κύριων ιδεωδών.

4.9. Έστω F υποδακτύλιος του $\mathbb{Q}$. Αν $a \in F$ έχουμε ότι $a = \dfrac{a}{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}}$, όπου $p_1, \cdots, p_m$ διακεκριμένοι πρώτοι, $a_1, \cdots, a_m \geq 0$ με $(n, p_i) = 1$, για κάθε i. Συνεπώς, θεωρούμε το εξής σύνολο :

$$S = \left\{ p_{i_1}^{a_1} \cdots p_{i_m}^{a_m} \mid m \in \mathbb{N},\ a_i \geq 0,\ p_{i_j} \text{ πρώτοι ώστε } \frac{1}{p_{i_1}^{a_1} \cdots p_{i_m}^{a_m}} \in F \right\}.$$

Έτσι έχουμε ότι S είναι πολλαπλασιαστικό και μάλιστα $F = S^{-1}\mathbb{Z}$, άρα συμπεραίνουμε ότι F είναι της Noether.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΡΟΤΥΠΑ

5.1 Ασκήσεις

5.1. Δείξτε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{Z}$-πρότυπο. Στη συνέχεια δείξτε ότι για κάθε σώμα k το σώμα των ρητών συναρτήσεων $k(x)$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο $k[x]$- πρότυπο.

5.2. Έστω
$$0 \to L \to M \to N \to 0$$
ακριβής ακολουθία R - προτύπων. Δείξτε ότι αν τα L, N είναι πεπερασμένα παραγόμενα, τότε το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

5.3. Έστω L, N υποπρότυπα του R- προτύπου M. Δείξτε ότι αν τα $L+N$, $L \cap N$ είναι πεπερασμένα παραγόμενα, τότε και τα L, N είναι πεπερασμένα παραγόμενα.

5.4. (i) Αν M, N είναι υποπρότυπα ενός τρίτου προτύπου, τότε $\mathrm{Ann}(M+N) = \mathrm{Ann}(M) \cap \mathrm{Ann}(N)$.

(ii) Αν I, J είναι ιδεώδη του R, τότε $(I : J) = \mathrm{Ann}((I+J)/I)$.

5.5. Έστω R δακτύλιος της Noether, I ιδεώδες του R και S πολλαπλασιαστικό υποσύνολο του R. Δείξτε ότι
$$S^{-1}(\mathrm{Ann}(I)) = \mathrm{Ann}(S^{-1}I).$$

5.6. Αν $\varphi\colon R \to R'$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων και M είναι R'-πρότυπο, τότε το M γίνεται R-πρότυπο ορίζοντας $rm = \varphi(r)m$, όπου $r \in R, m \in M$. Αληθεύει ότι αν το M' είναι πεπερασμένα παραγόμενο ως R' - πρότυπο, τότε είναι πεπερασμένα παραγόμενο ως R-πρότυπο;

5.7. Έστω L, N υποπρότυπα του R- προτύπου M. Ορίζοντας κατάλληλους ομομορφισμούς, δείξτε ότι υπάρχει ακριβής ακολουθία της μορφής

$$0 \to \frac{M}{L \cap N} \to \frac{M}{L} \times \frac{M}{N} \to \frac{M}{L+N} \to 0.$$

5.8. Έστω $R \neq \{0\}$. Δείξτε ότι αν υπάρχει επιμορφισμός R- προτύπων $R^m \to R^n$, τότε $m \geq n$.

5.9. Έστω k σώμα. Υποθέτουμε ότι όλοι οι επόμενοι διανυσματικοί χώροι έχουν πεπερασμένες διαστάσεις.

(i) Δείξτε ότι αν
$$0 \to V_2 \to V_1 \to V_0 \to 0$$
είναι ακριβής ακολουθία k-διανυσματικών χώρων, τότε $\dim V_1 = \dim V_0 + \dim V_2$.

(ii) Έστω
$$0 \to V_n \to V_{n-1} \to ... \to V_0 \to 0$$
ακριβής ακολουθία k-διανυσματικών χώρων, όπου $n \geq 2$. Δείξτε ότι
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0.$$

5.10. Έστω I, J ιδεώδη του R. Ορίζοντας κατάλληλους ομομορφισμούς, δείξτε ότι υπάρχει ακριβής ακολουθία R-προτύπων της μορφής

$$0 \to I \cap J \to R \to (R/I) \times (R/J) \to R/(I+J) \to 0.$$

Στη συνέχεια δείξτε ότι από το προηγούμενο αποτέλεσμα έπεται το κινέζικο θεώρημα υπολοίπων.

Οι ασκήσεις 11-13 αναφέρονται στο Λήμμα του Nakayama.

5.11. (i) Αν R είναι τοπικός δακτύλιος της Noether με μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}$ και ισχύει $\mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n$ για κάποιο n, τότε $\mathfrak{m}^n = 0$.

(ii) Έστω M ένα πεπερασμένα παραγόμενο R- πρότυπο. Δείξτε ότι αν $N \leq M$ και $I \subseteq \mathrm{Jac}(R)$ ιδεώδες του R τέτοια ώστε $N + IM = M$, τότε $N = M$.

5.12. Χρησιμοποιώντας το (ii) της προηγούμενης άσκησης, δείξτε τα εξής.

(i) Έστω ότι ο R είναι τοπικός δακτύλιος με μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}$. Αν τα $m_1 + \mathfrak{m}M, ..., m_t + \mathfrak{m}M$ παράγουν το $R/\mathfrak{m}$ - διανυσματικό χώρο $M/\mathfrak{m}M$, τότε τα $m_1, \cdots, m_t$ παράγουν το R-πρότυπο M.

(ii) Έστω $I \subseteq \mathrm{Jac}(R)$ ιδεώδες του R και $\varphi\colon M \to N$ ομομορφισμός R -προτύπων με N πεπερασμένα παραγόμενο. Δείξτε ότι αν ο επαγόμενος ομομορφισμός $M/IM \to N/IN$ είναι επί, τότε και ο φ είναι επί.

5.13. Έστω R τοπικός δακτύλιος της Noether με μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}$.

(i) Δείξτε ότι αν $\mathrm{Spec}R \neq \{\mathfrak{m}\}$, τότε για κάθε θετικό ακέραιο n, έχουμε $\mathfrak{m}^{n+1} \neq \mathfrak{m}^n$.

(ii) Τί συμβαίνει με τις δυνάμεις του $\mathfrak{m}$ αν $\mathrm{Spec}R = \{\mathfrak{m}\}$;

5.14. Από το θεώρημα βάσης του Hilbert ξέρουμε ότι κάθε ιδεώδες του $\mathbb{C}[x, y]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Ο σκοπός της άσκησης αυτής είναι να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει άνω φράγμα στο ελάχιστο πλήθος γεννητόρων των ιδεωδών του $\mathbb{C}[x, y]$ (βλ. ερώτημα (iv) παρακάτω). Θεωρούμε το ιδεώδες $I = (x, y)$ του $\mathbb{C}[x, y]$.

(i) Δείξτε ότι το I είναι μέγιστο ιδεώδες και ότι για κάθε θετικό ακέραιο n,

$$I^n = \left(x^n, x^{n-1}y, ..., xy^{n-1}, y^n\right).$$

(ii) Βρείτε μια (άπειρη) βάση του I^n ως $\mathbb{C}$-διανυσματικό χώρο αποτελούμενη από μονώνυμα. Από αυτό συμπεράνατε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n,

$$\dim_{\mathbb{C}} I^n/I^{n+1} = n + 1.$$

(iii) Δείξτε το εξής γενικό λήμμα. Έστω M ένα R-πρότυπο και $\mathfrak{m}$ μέγιστο ιδεώδες του R. Τότε το $M/\mathfrak{m}M$ είναι $R/\mathfrak{m}$ -διανυσματικός χώρος και αν επιπλέον το M παράγεται από πεπερασμένο σύνολο t στοιχείων, τότε

$$\dim_{R/\mathfrak{m}} M/\mathfrak{m}M \leq t.$$

(iv) Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα, δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n, το ιδεώδες I^n δεν δύναται να παραχθεί από σύνολο που έχει λιγότερα από $n + 1$ στοιχεία.

5.15. Θεωρούμε το δακτύλιο $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

(i) Δείξτε ότι κάθε ιδεώδες του R μπορεί να παραχθεί από δύο στοιχεία.

(ii) Δείξτε ότι αν M είναι ελεύθερο R-πρότυπο με $\mathrm{rank}_R M = r$, τότε το M είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$-πρότυπο με $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} M = 2r$.

5.16. Έστω R μη μηδενικός δακτύλιος. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) R είναι σώμα.

(ii) Κάθε R-πρότυπο είναι ελεύθερο.

(iii) Κάθε κυκλικό R-πρότυπο είναι ελεύθερο.

5.17. Έστω R μη μηδενικός δακτύλιος. Δείξτε ότι κάθε ιδεώδες του R είναι ελεύθερο R-πρότυπο αν και μόνο αν ο R είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών.

5.18. Έστω k σώμα. Βρείτε ιδεώδες του $k[x,y]$ που δεν είναι ελεύθερο $k[x,y]$-πρότυπο.

5.19. Έστω R περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης και $x, y \in R$ με μκδ$(x,y) = 1$. Θεωρούμε το ιδεώδες $I = (x,y)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακριβής ακολουθία R-προτύπων της μορφής

$$0 \to R \xrightarrow{\alpha} R \oplus R \xrightarrow{\beta} I \to 0,$$

όπου $\alpha(r) = (ry, rx)$, και $\beta(r,s) = rx - sy$. Αυτή ονομάζεται σύμπλοκο του Koszul για το ζεύγος (x,y).

5.2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

5.1. • Υποθέτουμε ότι $\mathbb{Q}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{Z}$ - πρότυπο, δηλαδή $\mathbb{Q} = \left(\frac{a_1}{b_1}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}\right)$. Αν $\ell =$ ε.κ.π. $(b_1, \cdots, b_n)$, τότε υπάρχουν $c_i \in \mathbb{Z}$, ώστε $\ell = c_i b_i$, για κάθε $i = 1, \cdots, n$. Άρα, έχουμε ότι $\mathbb{Q} = \left(\frac{c_1 a_1}{\ell}, \cdots, \frac{c_n a_n}{\ell}\right)$. Θεωρούμε p πρώτο ώστε $p \not| \ell$. Όμως, $\frac{1}{p} \in \mathbb{Q}$, άρα υπάρχουν $d_1, \cdots, d_n$, ώστε $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i c_i a_i}{\ell}$, το οποίο είναι άτοπο από τα παραπάνω.

- Υποθέτουμε ότι $k(x)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο, $k(x) = \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \cdots, \frac{f_n(x)}{g_n(x)}\right)$. Αν $h(x) =$ ε.κ.π. $(g_1(x), \cdots, g_n(x))$, τότε έχουμε ότι υπάρχουν $m_i(x) \in k[x]$, ώστε $h(x) = m_i(x) g_i(x)$. Επομένως, έχουμε ότι $k(x) = \left(\frac{m_1(x) f_1(x)}{h(x)}, \cdots, \frac{m_n(x) f_n(x)}{h(x)}\right)$. Αν $p(x) \in k[x]$ ανάγωγό ώστε $p(x) \not| h(x)$, τότε όμοια με το πρώτο σκέλος της άσκησης, καταλήγουμε σε άτοπο.

5.2. Αφού τα L, M είναι πεπερασμένα παραγόμενα έχουμε ότι $L = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ και $N = (\nu_1, \cdots, \nu_t)$. Αφού η ακολουθία

$$0 \to L \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} N \to 0$$

είναι ακριβής, έχουμε ότι φ είναι μονομορφισμός και ψ επιμορφισμός R-προτύπων. Αν $m \in M$ έχουμε ότι υπάρχουν $d_1, \cdots, d_t \in R$, ώστε $\psi(m) = \sum_{i=1}^{t} d_i \nu_i$. Αφού ψ είναι επί έχουμε ότι υπάρχουν $m_1, \cdots, m_t \in M$, ώστε

$$\psi(m) = \sum_{i=1}^{t} d_i \nu_i = \sum_{i=1}^{t} d_i \psi(m_i) = \psi\left(\sum_{i=1}^{t} d_i m_i\right) \Rightarrow m - \sum_{i=1}^{t} d_i m_i \in \ker \psi = \mathrm{Im}\varphi.$$

Συνεπώς, έχουμε ότι υπάρχουν $c_1, \cdots, c_k \in R$, ώστε να ισχύει

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i\right) = m - \sum_{i=1}^{t} d_i m_i \Rightarrow m = \sum_{i=1}^{t} d_i m_i + \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi(\lambda_i).$$

Επομένως, έχουμε ότι $M = (m_1, \cdots, m_t, \varphi(\lambda_1), \cdots, \varphi(\lambda_k))$.

5.3. Αρχικά αν $L+N$ πεπερασμένα παραγόμενο, τότε $L+N/N$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Θεωρούμε την εξής ακολουθία προτύπων

$$0 \to L \cap N \xrightarrow{\mathrm{id}} L \xrightarrow{\pi} L + N/N \to 0$$

όπου id η εμφύτευση του $L \cap N$ στο L και $\pi \colon L \to L + N/N$, $\ell \mapsto \ell + N$. Είναι σαφές ότι id μονομορφισμός, π επιμορφισμός και $\mathrm{Im}\,\mathrm{id} = \ker \pi = L \cap N$, άρα η ακολουθία είναι ακριβής. Έτσι, από την Άσκηση 5.2 έχουμε το ζητούμενο.

5.4. (i) Έχουμε ότι $r \in \mathrm{Ann}(M+N)$ αν και μόνο $r(n+m)=0$ για κάθε $n \in N$ και $m \in M$ αν και μόνο αν $rn = rm = 0$, για κάθε $n \in N$ και $m \in M$ αν και μόνο αν $r \in \mathrm{Ann}(M) \cap \mathrm{Ann}(N)$.

(ii) Έχουμε ότι $r \in (I : J)$ αν και μόνο αν $rJ \subseteq I$ αν και μόνο αν $rj \in I$ για κάθε $j \in J$. Τα προηγούμενα είναι ισοδύναμα με το εξής : $r\left((i+j)+I\right) = I$, για κάθε $i \in I$ και $j \in J$ αν και μόνο αν $r \in \mathrm{Ann}((I+J)/I)$.

5.5. Αρχικά θα δείξουμε ότι $S^{-1}(\mathrm{Ann}(I)) = \mathrm{Ann}(S^{-1}I)$ στη περίπτωση όπου I είναι κύριο ιδεώδες του R. Έστω $I = (x) \lhd R$ και έστω $a \in S^{-1}(\mathrm{Ann}(I))$. Τότε ισχύει ότι $a = \frac{r}{s}$ με $r \in \mathrm{Ann}(I)$, συνεπώς αφού κάθε στοιχείο του $S^{-1}I$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή $\frac{i}{s'}$ με $i \in I$ και $s' \in S$, είναι σαφές ότι $\frac{r}{s} \in \mathrm{Ann}(S^{-1}I)$.

Αντίστροφα, έστω $\frac{r}{s} \in \mathrm{Ann}(S^{-1}I)$, δηλαδή $\frac{r}{s} \cdot \frac{x}{1} = \frac{0}{1}$. Έτσι έχουμε ότι υπάρχει $u \in S$, ώστε $urx = 0 \Rightarrow ru \in \mathrm{Ann}(I)$. Επομένως, έχουμε ότι $\frac{r}{s} = \frac{ur}{us} \in S^{1}\left(\mathrm{Ann}(I)\right)$. Συνεπώς, έχουμε ότι $S^{-1}(\mathrm{Ann}(I)) = \mathrm{Ann}(S^{-1}I)$.

Έστω τώρα $I \lhd R$ και αφού R της Noether υπάρχουν $m_1, \cdots, m_n$, ώστε να ισχύει

$$I = (m_1) + \cdots + (m_n).$$

Από τις Ασκήσεις 4.2 και 5.4 (i) έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ann}(S^{-1}I) &= \mathrm{Ann}\left(S^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(m_i)\right)\right) = \\
&= \mathrm{Ann}\left(\sum_{i=1}^{n} S^{-1}((m_i))\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}\left(S^{-1}(m_i)\right)) \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} S^{-1}\left(\mathrm{Ann}(m_i)\right)) = S^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}(m_i))\right) \\
&= S^{-1}\left(\mathrm{Ann}\left(\sum_{i=1}^{n}(m_1)\right)\right) = S^{-1}\left(\mathrm{Ann}(I)\right)
\end{aligned}$$

5.6. Έχουμε ότι $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ n \mapsto n$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων και ότι $\mathbb{Q} = (1)$, δηλαδή $\mathbb{Q}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{Q}$-πρότυπο. Όμως, στην Άσκηση 5.1 δείξαμε ότι $\mathbb{Q}$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{Z}$-πρότυπο. Έτσι, δείξαμε ότι ο ισχυρισμός δεν αληθεύει γενικά.

5.7. Για να βρούμε ακριβή ακολουθία της μορφής

$$0 \to \frac{M}{L \cap N} \xrightarrow{f} \frac{M}{L} \times \frac{M}{N} \xrightarrow{g} \frac{M}{L+N} \to 0$$

αναζητούμε μονομορφισμό f και επιμορφισμό g ώστε $\mathrm{Im} f = \ker g$. Θεωρούμε τις εξής απεικονίσεις

$$f\colon \frac{M}{L\cap N} \to \frac{M}{L} \times \frac{M}{N},\ m + L\cap N \mapsto (m+L, m+N)$$

και

$$g\colon \frac{M}{L} \times \frac{M}{N} \to \frac{M}{L+N},\ (m_1+L, m_2+N) \mapsto (m_1-m_2)+L+N.$$

Προφανώς, f είναι μονομορφισμός και g επιμορφισμός, αφού για κάθε $m+(L+N) \in \frac{M}{L+N}$ έχουμε ότι $g(m+L, 0+N) = m+(L+N)$. Επίσης έχουμε ότι

$$\mathrm{Im} f = \{(m+L, m+N) \mid m \in M\} \subseteq \ker g.$$

Θεωρούμε τώρα $(m_1+L, m_2+N) \in \ker g \Leftrightarrow m_1 - m_2 \in L+N$. Συνεπώς, υπάρχουν $\lambda \in L$ και $n \in N$, ώστε $m = m_1 - \lambda = m_2 + n$. Συνεπώς, έχουμε ότι $(m_1+L, m_2+N) = (m+L, m+N) \in \mathrm{Im} f$ και συμπεραίνουμε το ζητούμενο.

5.8. Αν $\mathfrak{m}$ μέγιστο ιδεώδες του R, έχουμε ότι $(R/\mathfrak{m})^n, (R/\mathfrak{m})^m$ είναι $R/\mathfrak{m}$-διανυσματικοί χώροι. Αφού υπάρχει επιμορφισμός R- προτύπων

$$\varphi\colon R^m \to R^n,\ (r_1, \cdots, r_m) \mapsto (s_1, \cdots, s_n)\ ,$$

τότε η απεικόνιση

$$\tilde{\varphi}\colon\ (R/\mathfrak{m})^m \to (R/\mathfrak{m})^n\ ,\ (r_1+\mathfrak{m}, \cdots, r_m+\mathfrak{m}) \mapsto (s_1+\mathfrak{m}, \cdots, s_n+\mathfrak{m})$$

είναι επιμορφισμός $R/\mathfrak{m}$-διανυσματικών χώρων, όπου συμπεραίνουμε ότι $m \geq n$.

5.9. (i) Αν $\{v_1, \cdots, v_n\}$ μια βάση του V_0 και $\{u_1, \cdots, u_m\}$ μια βάση του V_2 με $0 \to L \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} N \to 0$ ακριβής ακολουθία. Όμοια με την Άσκηση 5.2 έχουμε ότι $V_1 = (w_1, \cdots, w_n, \varphi(u_1), \cdots, \varphi(u_m))$, όπου $\psi(w_i) = v_i$, για κάθε $i = 1, \cdots, n$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\{w_1, \cdots, w_n, \varphi(u_1), \cdots, \varphi(u_m)\}$ είναι βάση του V_1, δηλαδή με βάση τα παραπάνω ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Θεωρούμε $\lambda_1, \cdots, \lambda_{m+n} \in k$, ώστε να ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_{n+i}\varphi(u_i) = 0.$$

Αφού η παραπάνω ακολουθία είναι ακριβής έχουμε ότι $\mathrm{Im}\varphi = \ker\psi$, συνεπώς $\psi(\varphi(u_i) = 0$, για κάθε i, και $\psi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$, για $i = 1, \cdots, n$. Έτσι, αν αναχθούμε στην αρχική σχέση, αφού φ είναι μονομορφισμός έχουμε ότι $\lambda_{n+i} = 0$, για κάθε $i = 1, \cdots, m$ και έτσι έχουμε δείξει ότι $\dim V_1 = n+m = \dim V_0 + \dim V_2$.

(ii) Το ζητούμενο θα αποδειχθεί με επαγωγή στο n.

- **Βάση.** Για $n = 2$ αναγόμαστε στο (i) και έχουμε το ζητούμενο.
- **Επαγωγικό Βήμα.** Αν $n > 2$ μπορούμε να διασπάσουμε την ακολουθία

$$0 \to V_n \to V_{n-1} \to \cdots \to V_3 \to V_2 \xrightarrow{\varphi} V_1 V_0 \to 0$$

ως εξής

$$0 \to V_n \to V_{n-1} \to \cdots \to V_2 \to \mathrm{Im} f \to 0$$

και

$$0 \to \mathrm{Im} f \to V_1 \to V_0 \to 0.$$

Έτσι από τα παραπάνω και την επαγωγική υπόθεση και τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\sum_{i=2}^{n} (-1)^i \dim V_i - \dim \mathrm{Im} f = 0 \quad \text{και} \quad \dim \mathrm{Im} f + \dim V_0 = \dim V_1$$

επομένως έχουμε το ζητούμενο και το επαγωγικό βήμα έχει ολοκληρωθεί.

5.10. Θεωρούμε την εξής ακολουθία R-προτύπων :

$$0 \to I \cap J \xrightarrow{\mathrm{id}} R \xrightarrow{f} (R/I) \times (R/J) \xrightarrow{g} R/(I+J) \to 0$$

με id την εμφύτευση του $I \cap J$ στο R, $f(r) = (r + I, r + J)$ και $g\,(m_1 + I, m_2 + J) = (m_1 - m_2) + (I + J)$, όπου είναι σαφές ότι είναι ομομορφισμοί δακτυλίων, άρα και ομομορφισμοί R-προτύπων. Ομοία με την Άσκηση 5.7 έχουμε ότι id μονομορφισμός, $\mathrm{Im(id)} = I \cap J = \ker f$, g επιμορφισμός και $\mathrm{Im} f = \ker g$, συνεπώς η παραπάνω ακολουθία είναι ακριβής. Θα δείξουμε, μέσω της παραπάνω ακριβούς ακολουθίας, ότι επεται το Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων.

Έστω I και J σχετικά πρώτα ιδεώδη του R, δηλαδή ισχύει ότι $R = I + J$. Όπως, παραπάνω έχουμε ότι $R/(I + J) = 0 \Rightarrow \ker g = (R/I) \times (R/J) = \mathrm{Im} f$. Επίσης, έχουμε ότι $\ker f = I \cap J = \mathrm{Im(id)}$, συνεπώς από το 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών έχουμε ότι

$$R/(I \cap J) \simeq (R/I) \times (R/J)$$

και έτσι έχουμε δείξει το ζητούμενο.

5.11. (i) Αφού R της Noether, τότε m^n είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο με $\mathrm{Jac}(R) = \mathfrak{m}$ και $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^n$. Έτσι, από το Λήμμα του Nakayama έχουμε ότι $\mathfrak{m}^n = 0$.

(ii) Αν M είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο, τότε έχουμε ότι M/N είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο. Επίσης, έχουμε ότι $(N + IM)/N = M/N \Rightarrow I \cdot (M/N) = M/N$. Από το Λήμμα του Nakayama έχουμε ότι $M/N = 0$, δηλαδή ισχύει ότι $M = N$.

5.12. (i) Έστω $N = (m_1, \cdots, m_t) \leq M$ και $m \in M$. Τότε, υπάρχουν $r_1, \cdots, r_t \in R$ ώστε να ισχύει

$$m + \mathfrak{m}M = \sum_{n=1}^{t} (r_i + \mathfrak{m})(m_i + \mathfrak{m}M) = \sum_{i=1}^{t} (r_i m_i + \mathfrak{m}M) \Leftrightarrow m - \sum_{i=1}^{t} r_i m_i \in \mathfrak{m}M.$$

Έτσι είναι σαφές ότι $N + \mathfrak{m}M = M$ και αφού $\mathrm{Jac}(R) = \mathfrak{m}$ από την Άσκηση 5.11 (ii) έχουμε ότι $M = N$.

(ii) Αν $n \in N$ έχουμε ότι υπάρχει $m \in M$, ώστε $\varphi(m) + IN = n + IN$. Συνεπώς είναι σαφές ότι $\mathrm{Im}\varphi + IN = N$, άρα από την Άσκηση 5.11 (ii) έχουμε ότι $N = \mathrm{Im}\varphi$.

5.13. (i) Έστω ότι υπάρχει $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ώστε $\mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n$, συνεπώς από την Άσκηση 5.11 (i) έχουμε ότι $\mathfrak{m}^n = (0)$. Έστω τώρα $m \in \mathfrak{m}$ και $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$ όπου ισχύει ότι

$$m \in \mathfrak{m} \Rightarrow m^n \in \mathfrak{m}^n = (0) \Rightarrow m^n = 0 \in \mathfrak{p} \Rightarrow m \in \mathfrak{p}.$$

Άρα, προκύπτει ότι $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$, για κάθε $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$. Τώρα, αφού R είναι τοπικός η αντίστροφη σχέση υποσυνόλων ισχύει άμεσα, άρα έχουμε ότι $\mathrm{Spec}R = \{\mathfrak{m}\}$, όπου καταλήγουμε σε άτοπο.

(ii) Τώρα, αν υποθέσουμε ότι $\mathrm{Spec}R = \{\mathfrak{m}\}$ έχουμε ότι $\sqrt{(0)} = \mathfrak{m}$, αφού $\sqrt{(0)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \text{ πρώτο}} \mathfrak{p}$. Αφού R είναι της Noether, υπάρχουν $a_1, \cdots, a_t \in R$ ώστε $\mathfrak{m} = (a_1, \cdots, a_t)$. Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι υπάρχουν $n_1, \cdots, n_t$ ώστε $a_i^{n_i} = 0$, για κάθε $i = 1, \cdots, t$. Αν θέσουμε $n = \sum_{i=1}^{t} n_i$ θα δείξουμε ότι $\mathfrak{m}^n = 0$.

Έχουμε ότι $\mathfrak{m}^n = \left(\left\{\prod_{i=1}^{t} a_i^{k_i} \mid k_1 + \cdots + k_n = n\right\}\right)$ και για κάθε $k_1, \cdots, k_t \in \mathbb{Z}_{>0}$ με $k_1 + \cdots + k_t = n$, ισχύει ότι υπάρχει $i \in \{1, \cdots, t\}$ ώστε $n_i \leq k_i$ και έτσι είναι σαφές ότι $\mathfrak{m}^n = (0)$.

5.14. (i) Έχουμε ότι $\mathbb{C}, y]/(x, y) \simeq \mathbb{C}$, άρα έχουμε ότι (x, y) μέγιστο ιδεώδες του $\mathbb{C}, y]$. Επίσης, με επαγωγή στο n αποδεικνύεται ότι $I^n = \left(x^n, x^{n-1}y, ..., xy^{n-1}, y^n\right)$.

(ii) Θεωρώντας το I^n σαν $\mathbb{C}$-διανυσματικό χώρο έχουμε ότι σύνολο $\mathcal{B} = \{x^i y^j \mid i + j \geq n\}$ είναι μια βάση του I^n, η οποία είναι άπειρη.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το σύνολο

$$\left\{x^n + I^{n+1}, x^{n-1}y + I^{n+1}, \cdots, xy^{n-1} + I^{n+1}, y^n + I^{n+1}\right\}$$

είναι βάση του $\mathbb{C}$-διανυσματικού χώρου I^n/I^{n+1}, δηλαδή $\dim_{\mathbb{C}} I^n/I^{n+1} = n + 1$.

(iii) Είναι σαφές ότι $\mathfrak{m}M \leq M$ και αφού $R/\mathfrak{m}$ είναι σώμα το $M/\mathfrak{m}M$ αποκτά δομή διανυσματικού χώρου με πράξεις

- $(+)$: $M/\mathfrak{m}M \times M/\mathfrak{m}M,\ (m_1+\mathfrak{m}M, m_2+\mathfrak{m}M) \mapsto (m_1+m_2)+\mathfrak{m}M$
- $(\cdot)$: $M/\mathfrak{m}M \times R/\mathfrak{m},\ (m+\mathfrak{m}M, r+\mathfrak{m}) \mapsto rm+\mathfrak{m}M$

Αν $M = (m_1, \cdots, m_t)$ έχουμε ότι $M/\mathfrak{m}M = (m_1+\mathfrak{m}M, \cdots, m_t+\mathfrak{m}M)$ και αφού $M/\mathfrak{m}M$ είναι $R/\mathfrak{m}$-διανυσματικός χώρος προκύπτει ότι $\dim_{R/\mathfrak{m}} M/\mathfrak{m}M \leq t$.

(iv) Έστω ότι I^n παράγεται από $m < n+1$ στοιχεία, άρα από (iii) έχουμε ότι $\dim_{\mathbb{C}} M/\mathfrak{m}M \leq m < n+1$, αφού $\mathbb{C}[x,y]/I \simeq \mathbb{C}$, και καταλήγουμε σε άτοπο από (ii).

5.15. (i) Αφού $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ είναι ευκλείδια περιοχή, τότε είναι περιοχή κύριων ιδεωδών. Έτσι, αν I μη μηδενικό ιδεώδες του R είναι της μορφής $I = \left(a+b\sqrt{2}\right)$. Αν $c+d\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ παρατηρούμε ότι

$$m = \left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c+\sqrt{2}\right) = c\left(a+b\sqrt{2}\right) + d\left(2b+a\sqrt{2}\right).$$

Συνεπώς, έχουμε ότι το ιδεώδες I μπορεί να παραχθεί από δύο στοιχεία ως R πρότυπο.

(ii) Αφού M ένα R- ελεύθερο πρότυπο υπάρχει $\{m_1, \cdots, m_r\}$ μια βάση του M. Συνεπώς, αν $m \in M$ ισχύει ότι υπάρχουν $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ για κάθε $i = 1, \cdots, r$ ώστε

$$m = \sum_{i=1}^{r}\left(a_i + b_i\sqrt{2}\right)m_i = \sum_{i=1}^{r} a_i m_i + \sum_{i=1}^{r} b_i\sqrt{2}m_i.$$

Έτσι έχουμε ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \left\{m_1, \cdots, m_n, m_1\sqrt{2}, \cdots, m_n\sqrt{2}\right\}$ παράγει το M σαν $\mathbb{Z}$- πρότυπο και αφού $\{m_1, \cdots, m_r\}$ είναι βάση του R-προτύπου M έπεται άμεσα ότι το σύνολο είναι $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και έχουμε το ζητούμενο.

5.16.
- (i) $\to$ (ii) Αφού τα μόνο ιδεώδη του R είναι τα $(0), R$ έχουμε άμεσα το ζητούμενο.
- (ii) $\to$ (iii) Άμεσο.
- (iii) $\to$ (i) Έστω μη μηδενικό ιδεώδες I του R με $I \neq R$. Άρα, αφού το R-πρότυπο $R/I = (1_R + I) \neq (0)$ είναι κυκλικό, τότε είναι ελεύθερο. Συνεπώς, υπάρχει $\{r_j + I\}_{j\in J}$ βάση του R/I. Αν $r \in I \setminus \{0\}$, τότε έχουμε ότι $r(r_j + I) = I$, για κάθε $j \in J$, το οποίο είναι άτοπο αφού $\{r_j\}_{j\in J}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Συνεπώς έχουμε ότι $I = (0)$ ή $R = I$, δηλαδή ισχύει ότι R είναι σώμα.

5.17. Υποθέτουμε ότι κάθε ιδεώδες του R είναι R-ελεύθερο. Έστω I μη μηδενικό ιδεώδες του R, συνεπώς είναι ελεύθερο.

Αν X μια βάση του I, έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, για $x, y \in X$, έχουμε ότι $xy - yx = 0$, αφού R είναι μεταθετικος. Συνεπώς, καταλήγουμε σε άτοπο, αφού τα x, y δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα . Άρα, $X = \{a\}$ και $I = (a)$.

Τέλος, θα δείξουμε ότι R είναι περιοχή, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $r \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Ann}(r) = (0)$. Δείξαμε ότι (r) είναι $R-$ ελεύθερο τάξης 1 , άρα έχουμε ότι $(r) \simeq R = (1_R)$, συνεπώς έχουμε ότι $\mathrm{Ann}(r) = \mathrm{Ann}(1_R) = (0)$ και έχουμε το ζητούμενο.

Αντίστροφα, γνωρίζουμε ότι I υποπρότυπο του ${}_RR$ αν και μόνο αν $I \triangleleft R$. Αφού R είναι Π.Κ.Ι. και $R = (1_R)$ με $\mathrm{Ann}(1_R) = (0)$ έχουμε ότι R είναι ελεύθερο, άρα και κάθε κάθε ιδεώδες του R είναι ελεύθερο R-πρότυπο. [1]

5.18. Έστω ότι υπάρχει $\mathcal{B}$ βάση του $k[x, y]$-προτύπου (x, y). Αφού για κάθε $f, g \in \mathcal{B}$ ισχύει ότι $fg - gf = 0$ συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{B} = \{f\}$. Έτσι, αφού $f|x, f|y$ συμπεραίνουμε ότι $f \in k \setminus \{0\}$, το οποίο είναι άτοπο αφού (x, y) είναι μέγιστο ιδεώδες του $k[x, y]$.

5.19. Είναι άμεσο ότι η απεικονίσεις α και β είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός αντίστοιχα. Αρκεί να δείξουμε ότι $\ker \beta = \mathrm{im}\alpha$. Είναι σαφές ότι $\mathrm{im}\alpha \subseteq \ker \beta$. Τώρα, έστω $(r, s) \in \ker \beta$, δηλαδή $rx = sy$. Αν $\lambda =$ μ.κ.δ.(x, y), αφού R είναι περιοχή μοναδική παραγοντοποίησης, τότε $r = \lambda y$ και $s = \lambda x$ δηλαδή $\alpha(\lambda) = (r, s)$ και έχουμε το ζητούμενο.

[1] Βλέπε βιβλίο ''Rings, Modules and Linear Algebra'' (Hartley-Hawkes) Θεώρημα 7.8.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΑΛΥΣΙΔΩΝ

6.1 Ασκήσεις

6.1. Δείξτε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι $\mathbb{Z}$-πρότυπο της Noether και δεν είναι $\mathbb{Z}$-πρότυπο του Artin. Στη συνέχεια δείξτε ότι για κάθε σώμα k το σώμα των ρητών συναρτήσεων $\kappa(x)$ δεν είναι $k[x]$- πρότυπο της Noether και δεν είναι $k[x]$- πρότυπο του Artin.

6.2. Έστω M ένα R- πρότυπο και $\varphi\colon M \to M$ ομομορφισμός R- προτύπων. Δείξτε τα εξής.

(i) Αν M της Noether και φ επιμορφισμός, τότε φ ισομορφισμός.

(ii) Αν M του Artin και φ μονομορφισμός, τότε φ ισομορφισμός.

6.3. Έστω M ένα R- πρότυπο. Δείξτε ότι αν κάθε μη κενό σύνολο πεπερασμένα παραγόμενων υποπροτύπων του M έχει μεγιστικό στοιχείο, τότε το M είναι πρότυπο της Noether.

6.4. Έστω L, N υποπρότυπα του R- προτύπου M. Δείξτε ότι αν τα $M/L, M/N$ είναι της Noether (αντίστοιχα του Artin), τότε και τα $M/L \cap N, M/L + N$ είναι της Noether (αντίστοιχα του Artin).

6.5. Έστω M ένα R- πρότυπο της Noether. Δείξτε ότι ο δακτύλιος $R/\mathrm{Ann}(M)$ είναι της Noether.

6.6. Έστω M ένα πεπερασμένα παραγόμενο R- πρότυπο του Artin. Δείξτε ότι ο δακτύλιος $R/\mathrm{Ann}(M)$ είναι του Artin.

6.7. Έστω R μη μηδενικός δακτύλιος της Noether. Δείξτε ότι υπάρχει πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{p}$ του R τέτοιο ώστε υπάρχει μονομορφισμός R- προτύπων της μορφής και $f\colon R/\mathfrak{p} \to R$.

6.8. Δείξτε ότι τα απλά $\mathbb{Z}$-πρότυπα είναι ακριβώς τα $\mathbb{Z}_p$, όπου p πρώτος αριθμός. Ποια είναι τα απλά $k[x]$-πρότυπα, όπου k σώμα ;

6.9. Έστω $p \neq q$ πρώτοι αριθμοί και $n = p^2q^3$.

(i) Δείξτε ότι $\ell_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n) = 5$. Βρείτε 3 διαφορετικές συνθετικές σειρές του $\mathbb{Z}_n$.

(ii) Ποιο είναι το μήκος $\ell_{\mathbb{Z}_n}(\mathbb{Z}_n)$ του $\mathbb{Z}_n$-προτύπου $\mathbb{Z}_n$;

6.10. Δείξτε ότι το μήκος

(i) του $\mathbb{R}[x]$-προτύπου $\mathbb{R}[x]/(x^4 + 2x^2 + 1)$ είναι 2,

(ii) του $\mathbb{C}[x]$-προτύπου $\mathbb{C}[x]/(x^4 + 2x^2 + 1)$ είναι 4, και

(iii) του $\mathbb{Z}[x]$-προτύπου $\mathbb{Z}[x]/(x^4 + 2x^2 + 1)$ είναι ∞.

6.11. Έστω $0 \to L \to M \to N \to 0$ ακριβής ακολουθία R-προτύπων. Δείξτε τις εξής σχέσεις.

1. $\ell(M) < \infty \Leftrightarrow \ell(L) < \infty \quad \text{και} \quad \ell(N) < \infty$.
2. Αν όλα τα μήκη είναι πεπερασμένα, τότε $\ell(M) = \ell(L) + \ell(N)$.

6.12. Έστω $0 \to M_k \to M_{k-1} \to \cdots \to M_0 \to 0$ ακριβής ακολουθία R-προτύπων με $\ell(M_i) < \infty$ για κάθε i. Δείξτε ότι $\sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^i \ell(M_i) = 0$.

Σημείωση. Η Άσκηση 5.9 (ii) αποτελεί ειδική περίπτωση της παρούσας καθώς για κάθε k-διανυσματικό χώρο V έχουμε $\ell_k(V) = \dim_k V$.

6.13. Έστω $N \leq M$, M_1, M_2 R-πρότυπα με πεπερασμένα μήκη. Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν.

(i) $\ell(M/N\ ) = \ell(M) - \ell(N)$.

(ii) $\ell(M_1 \oplus M_2) = \ell(M_1) + \ell(M_2)$.

(iii) $\ell(N) = \ell(M) \Leftrightarrow N = M$.

6.14. Έστω M ένα R-πρότυπο πεπερασμένου μήκους και M_1, M_2 υποπρότυπα του M. Δείξτε ότι

$$\ell(M_1 + M_2) = \ell(M_1) + \ell(M_2) - \ell(M_1 \cap M_2).$$

Πού έχετε ξαναδεί παρόμοιο τύπο;

6.15. Έστω R τοπικός δακτύλιος με μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}$ και σώμα πηλίκο $k = R/\mathfrak{m}$. Έστω M ένα R- πρότυπο.

(i) Δείξτε ότι αν $\mathfrak{m}M = 0$,τότε το M είναι k- διανυσματικός χώρος και $\ell_R(M) = \ell_k(M) = \dim_k M$.

(ii) Υποθέτουμε επιπλέον ότι ο R είναι της Noether. Δείξτε ότι $\ell_R(M) < \infty$ αν και μόνο αν το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο και υπάρχει n με $\mathfrak{m}^n M = 0$.

6.2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

6.1. Από τις αλυσίδες υποπροτύπων

$$\left(\frac{1}{2}\right) \subsetneqq \left(\frac{1}{2^2}\right) \subsetneqq \left(\frac{1}{2^3}\right) \subsetneqq \cdots$$

και

$$(2) \supsetneqq (2^2) \supsetneqq (2^3) \supsetneqq \cdots$$

συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{Q}$ δεν είναι $\mathbb{Z}$-πρότυπο της Noether και του Artin.

Από τις αλυσίδες υποπροτύπων

$$\left(\frac{1}{x}\right) \subsetneqq \left(\frac{1}{x^2}\right) \subsetneqq \left(\frac{1}{x^3}\right) \subsetneqq \cdots$$

και

$$(x) \supsetneqq (x^2) \supsetneqq (x^3) \supsetneqq \cdots$$

συμπεραίνουμε ότι $\kappa(x)$ δεν είναι $k[x]$-πρότυπο της Noether και του Artin.

6.2. (i) Αφού ισχύει ότι

$$\ker\varphi \subseteq \ker\varphi^2 \subseteq \ker\varphi^3 \subseteq \cdots$$

και M της Noether, υπάρχει $n \geq 1$, ώστε $\ker\varphi^n = \ker\varphi^{n+1}$. Αφού φ είναι επιμορφισμός με επαγωγή στο n αποδεικνύεται ότι φ^n είναι επιμορφισμός. Άρα, αν $x \in \ker\varphi$ υπάρχει $y \in M$ ώστε $\varphi^n(y) = x \Rightarrow \varphi^{n+1}(y) = \varphi(x) = 0$. Έτσι έχουμε ότι $y \in \ker\varphi^{n+1} \Rightarrow y \in \ker\varphi^n \Rightarrow x = \varphi^n(y) = 0$, δηλαδή δείξαμε ότι $\ker\varphi = \{0\}$.

(ii) Αφού ισχύει ότι

$$\mathrm{Im}\varphi \supseteq \mathrm{Im}\varphi^2 \supseteq \mathrm{Im}\varphi^3 \supseteq \cdots$$

και M του Artin, υπάρχει $n \geq 1$, ώστε $\mathrm{Im}\varphi^n = \mathrm{Im}\varphi^{n+1}$. Αν $m \in M$, τότε έχουμε ότι $\varphi^n(m) \in \mathrm{Im}\varphi^n = \mathrm{Im}\varphi^{n+1}$, δηλαδή υπάρχει $x \in M$, ώστε $\varphi^n(m) = \varphi^{n+1}(x)$. Αφού φ είναι μονομορφισμός, τότε φ^n είναι επίσης 1-1 και έτσι έχουμε ότι $\varphi(x) = m$, δηλαδή φ είναι επί.

6.3. Έστω $N \leq M$ με $N \neq 0$. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{I} = \{K \leq M \mid K \subseteq N \text{ και } K \text{ πεπερασμένα παραγόμενο}\}\ ,$$

όπου έχουμε $I \neq \emptyset$ αφού $(0) \in \mathcal{I}$. Έτσι υπάρχει $K \in \mathcal{I}$ μεγιστικό στοιχείο με $K = (a_1, \cdots, a_n) \subseteq N$. Αν υπάρχει $a_{n+1} \in N \setminus K$, τότε έχουμε ότι $K' = (a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}) \subseteq N$ και υποπρότυπο του M με $K \subsetneqq K'$, το οποίο είναι άτοπο. Έτσι, έχουμε ότι $N = (a_1, \cdots, a_n)$.

6.4. Θεωρούμε ότι $M/N, M/L$ είναι $R-$ πρότυπα της Noether. Από Δεύτερο Θεώρημα Ισομορφισμών έχουμε ότι $L+N/N \simeq L/L\cap N$ όπου $L+N/N$ της Noether ως υποπρότυπο του M/N, άρα ισχύει ότι $L/L\cap N$ είναι της Noether.

Θεωρούμε την εξής ακριβή ακολουθία $R-$ προτύπων

$$0 \to L/L\cap N \xrightarrow{\text{id}} M/L\cap N \xrightarrow{\varphi} M/L \to 0$$

με id την ταυτοτική απεικόνιση και $\varphi(m+L\cap N) = m+L$. Αφού $L/L\cap N$ και M/N είναι της Noether έχουμε ότι $M/L\cap N$ είναι της Noether.

Τώρα, από Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμών έχουμε ότι

$$M/L+N \simeq \frac{M/N}{L+N/N} \ ,$$

όπου $\dfrac{M/N}{L+N/N}$ είναι της Noether ως πηλίκο του M/N, άρα έχουμε ότι $M/L+N$ είναι της Noether. Με ακριβώς όμοιο τρόπο αν υποθέσουμε ότι $M/N, M/L$ είναι του Artin έχουμε ότι $M/L\cap N, M/L+N$ είναι του Artin.

6.5. Αφού M της Noether υπάρχουν $m_1, \cdots, m_n \in M$ ώστε $M = (m_1) + \cdots + (m_n)$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $i = 1, \cdots, n$ ισχύει ότι $R/\text{Ann}(m_i) \simeq (m_i)$, άρα αφού (m_i) της Noether ως υποπρότυπο του M, τότε $R/\text{Ann}(m_i)$ είναι $R-$ πρότυπο της Noether. Με χρήση επαγωγής από την Άσκηση 7.3 έχουμε ότι $R/\bigcap_{i=1}^n \text{Ann}(m_i)$ είναι της Noether. Αφού ισχύει ότι

$$R/\bigcap_{i=1}^n \text{Ann}(m_i) = R/\text{Ann}\left((m_1)+\cdots+(m_n)\right) = R/\text{Ann}(M) \ ,$$

είναι της Noether σαν $R-$ πρότυπο. Όμως έχουμε ότι $\text{Ann}(M) \subseteq \text{Ann}\left(R/\text{Ann}(M)\right)$, συνεπώς έχουμε ότι $R/\text{Ann}(M)$ είναι της Noether σαν $R/\text{Ann}(M)-$ πρότυπο, δηλαδή $R/\text{Ann}(M)$ είναι δακτύλιος της Noether.

6.6. Υπάρχουν $m_1, \cdots, m_n \in M$ ώστε $M = (m_1) + \cdots + (m_n)$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $i = 1, \cdots, n$ ισχύει ότι $R/\text{Ann}(m_i) \simeq (m_i)$, άρα αφού (m_i) του Artin ως υποπρότυπο του M, τότε $R/\text{Ann}(m_i)$ είναι $R-$ πρότυπο του Artin. Με χρήση επαγωγής από την Άσκηση 7.3 έχουμε ότι $R/\bigcap_{i=1}^n \text{Ann}(m_i)$ είναι του Artin. Αφού ισχύει ότι

$$R/\bigcap_{i=1}^n \text{Ann}(m_i) = R/\text{Ann}\left((m_1)+\cdots+(m_n)\right) = R/\text{Ann}(M) \ ,$$

είναι του Artin σαν $R-$ πρότυπο. Όμως έχουμε ότι $\text{Ann}(M) \subseteq \text{Ann}\left(R/\text{Ann}(M)\right)$, συνεπώς έχουμε ότι $R/\text{Ann}(M)$ είναι του Artin σαν $R/\text{Ann}(M)-$ πρότυπο, δηλαδή $R/\text{Ann}(M)$ είναι δακτύλιος του Artin.

6.7. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{I} = \{J \lneq R \mid \text{υπάρχει } f\colon R/J \to R \text{ μονομορφισμός}\}$$

όπου $\mathcal{I} \neq \emptyset$, αφού ισχύει ότι $(0) \in \mathcal{I}$. Αφού R της Noether έχουμε ότι $\mathcal{I}$ έχει μεγιστικό στοιχείο $\mathfrak{p}$ και $f\colon R/\mathfrak{p} \to R$ μονομορφισμός.

Θα δείξουμε ότι $\mathfrak{p}$ είναι πρώτο. Έστω $ab \in \mathfrak{p}$ με $a \notin \mathfrak{p}$. Έστω $J = \mathfrak{p} + (b)$ και θεωρούμε την απεικόνιση

$$\tilde{f}\colon R \to R,\ r \mapsto f(ar + \mathfrak{p}).$$

Αφού η f είναι ομομορφισμός R- προτύπων έχουμε άμεσα ότι $\tilde{f}$ είναι ομομορφισμός R- προτύπων, άρα η απεικόνιση

$$g\colon R/\ker\tilde{f} \to \mathbb{R}, r + \ker\tilde{f} \mapsto f(ar + \mathfrak{p}).$$

είναι μονομορφισμός R-προτύπων. Αφού τα R- υποπρότυπα του R είναι τα ιδεώδη του, έχουμε ότι $\ker\tilde{f} \lneq R$ (αν $1_R \in \ker\tilde{f} \Rightarrow f(a + \mathfrak{p}) = 0$, το οποίο είναι άτοπο αφού $a \notin \mathfrak{p}$ και f μονομορφισμός.) Έτσι, δείξαμε ότι $\ker\tilde{f} \in \mathcal{I}$ και επίσης είναι σαφές ότι $\mathfrak{p} \subseteq J \subseteq \ker\tilde{f}$. Συνεπώς, από τη μεγιστικότητα του $\mathfrak{p}$ έχουμε ότι

$$\mathfrak{p} = \ker\tilde{f} = \mathfrak{p} + (b) \Rightarrow b \in \mathfrak{p},$$

άρα συμπεραίνουμε ότι $\mathfrak{p}$ είναι πρώτο.

6.8. Έστω M απλό $\mathbb{Z}$ πρότυπο. Ισοδύναμα έχουμε ότι $M \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, όπου $p\mathbb{Z}$ μέγιστο ιδεώδες του $\mathbb{Z}$. Συνεπώς M είναι απλό $\mathbb{Z}$ πρότυπο αν και μόνο αν $M \simeq \mathbb{Z}_p$, όπου p πρώτος.

Έστω M απλό $k[x]$- πρότυπο. Ισοδύναμα έχουμε ότι $M \simeq k[x]/(p(x))$, όπου $(p(x))$ μέγιστο ιδεώδες του $k[x]$. Συνεπώς M είναι απλό $k[x]$- πρότυπο αν και μόνο αν $M \simeq k[x]/(p(x))$, όπου $p(x)$ ανάγωγο στο $k[x]$.

6.9. (i) Έχουμε την εξής ακολουθία $\mathbb{Z}$- υποπροτύπων του $\mathbb{Z}_n$:

$$0 \to pq^3\mathbb{Z}_n \to pq^2\mathbb{Z}_n \to pq\mathbb{Z}_n \to p\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$$

η οποία είναι συνθετική. Έτσι έχουμε ότι $\ell_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n = 5$. Επίσης δύο ακόμα διαφορικές συνθετικές σειρές του $\mathbb{Z}_n$ είναι οι εξής :

$$0 \to p^2q^2\mathbb{Z}_n \to p^2q\mathbb{Z}_n \to p^2\mathbb{Z}_n \to p\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$$

και

$$0 \to pq^3\mathbb{Z}_n \to q^3\mathbb{Z}_n \to q^2\mathbb{Z}_n \to q\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n.$$

(ii) Αφού $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ με $n\mathbb{Z} \subseteq \mathrm{Ann}(\mathbb{Z}_n)$, τότε τα $\mathbb{Z}$- υποπρότυπα του $\mathbb{Z}_n$ ταυτίζονται με τα $\mathbb{Z}_n$- υποπρότυπα του $\mathbb{Z}_n$. Επίσης, αφού $p\mathbb{Z}_n$ και $q\mathbb{Z}_n$ μέγιστα ιδεώδη του δακτυλίου $\mathbb{Z}_n$ και από (i) έχουμε ότι

$$0 \to pq^3\mathbb{Z}_n \to pq^2\mathbb{Z}_n \to pq\mathbb{Z}_n \to p\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$$

είναι συνθετική σειρά για το $\mathbb{Z}_n$-πρότυπο $\mathbb{Z}_n$, συνεπώς έχουμε ότι $\ell_{\mathbb{Z}_n}(\mathbb{Z}_n) = 5$.

6.10. Γνωρίζουμε ότι κάθε δύο συνθετικές σειρές (αν υπάρχουν) ενός R- προτύπου έχουν το ίδιο μήκος, συνεπώς αν βρούμε συνθετική σειρά για τα επόμενα πρότυπα γνωρίζουμε ότι το μήκος της σειράς είναι και το μήκος του προτύπου.

(i) Αν $M = \mathbb{R}[x]/(x^4 + 2x^2 + 1)$ έχουμε ότι $\left((x^2+1)^2\right) \subseteq \mathrm{Ann}(M)$, συνεπώς θα δείξουμε ότι μια συνθετική σειρά του M είναι

$$0 \to \left(x^2+1\right) M \to M.$$

Έχουμε ότι $\left(x^2+1\right) M/0 \simeq \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ σαν $\mathbb{R}[x]-$ πρότυπα μέσω της απεικόνισης

$$(x^2+1)f(x) + \left((x^2+1)^2\right) \mapsto f(x) + (x^2+1)\ ,$$

με $x^2{+}1$ να είναι ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$, συνεπώς το ιδεώδες $(x^2{+}1)$ είναι μέγιστο. Επομένως έχουμε ότι το πηλίκο $\left(x^2+1\right) M/0$ είναι απλό.

Επίσης μέσω της απεικόνισης $f(x) + \left(\left(x^2+1\right)^2\right) \mapsto f(x) + \left(x^2+1\right)$ έχουμε ότι

$$M/(x^2+1)M \simeq \mathbb{R}[x]/(x^2+1)\ ,$$

και όπως παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι $M/(x^2+1)M$ είναι απλό πηλίκο. Έτσι, έχουμε ότι η παραπάνω πεπερασμένη ακολουθία είναι συνθετική σειρά του M, συνεπώς έχουμε ότι $\ell_{\mathbb{R}[x]}M = 2$.

(ii) Αν $M = \mathbb{C}[x]/(x^4 + 2x^2 + 1)$ έχουμε ότι $\left((x^2+1)^2\right) \subseteq \mathrm{Ann}(M)$, συνεπώς θα δείξουμε ότι μια συνθετική σειρά του M είναι

$$0 \to (x+i)(x^2+1)M \to (x^2+1)M \to (x+i)M \to M.$$

Έχουμε διαδοχικά ότι

- Έχουμε ότι $(x+i)(x^2+1)M/(0) \simeq \mathbb{C}[x]/(x-i)$, μέσω της απεικόνισης

  $$(x+i)(x^2+1)f(x) + \left((x^2+1)^2\right) \mapsto f(x) + (x-i).$$

  Αφού το $x-i$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{C}[x]$ έχουμε ότι $(x-i)$ είναι μέγιστο ιδεώδες του $\mathbb{C}[x]$, δηλαδή το $(x+i)(x^2+1)M/(0)$ είναι απλό.

- Έχουμε ότι $(x^2+1)M/(x+i)(x^2+1)M \simeq \mathbb{C}[x]/(x+i)$, μέσω της απεικόνισης
$$(x^2+1)f(x) + \big((x^2+1)^2\big) \mapsto f(x) + (x+i).$$
και από 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών. Αφού το $x+i$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{C}[x]$ έχουμε ότι $(x+i)$ είναι μέγιστο ιδεώδες του $\mathbb{C}[x]$, δηλαδή το $(x^2+1)M/(x+i)(x^2+1)M$ είναι απλό.
- Έχουμε ότι $(x+i)M/(x^2+1)M \simeq \mathbb{C}[x]/(x-i)$, μέσω της απεικόνισης
$$(x+i)f(x) + \big((x^2+1)^2\big) \mapsto f(x) + (x-i).$$
και από 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών. Αφού το $x-i$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{C}[x]$ έχουμε ότι $(x-i)$ είναι μέγιστο ιδεώδες του $\mathbb{C}[x]$, δηλαδή το $(x+i)M/(x^2+1)M$ είναι απλό.
- Έχουμε ότι $M/(x+i)M \simeq \mathbb{C}[x]/(x+i)$, μέσω της απεικόνισης
$$f(x) + \big((x^2+1)^2\big) \mapsto f(x) + (x+i).$$
και από 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών. Αφού το $x+i$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{C}[x]$ έχουμε ότι $(x+i)$ είναι μέγιστο ιδεώδες του $\mathbb{C}[x]$, δηλαδή το $M/(x+i)M$ είναι απλό.

Έτσι δείξαμε ότι κάθε πηλίκο της παραπάνω πεπερασμένης ακολουθίας είναι απλό, συνεπώς έχουμε ότι είναι συνθετική σειρά με $\ell_{\mathbb{C}[x]}M = 4$.

(iii) Αν $M = \mathbb{Z}[x]/(x^4+2x^2+1)$ έχουμε ότι $\big((x^2+1)^2\big) \subseteq \mathrm{Ann}(M)$, συνεπώς τα $\mathbb{Z}[x]$-υποπρότυπα του M ταυτίζονται με τα $M-$ υποπρότυπα του M. Έτσι, για να δείξουμε ότι M δεν έχει συνθετική σειρά, ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι δεν είναι του Artin σαν $\mathbb{Z}[x]$- πρότυπο. (Με βάση την παραπάνω παρατήρηση αφού M είναι της Noether σαν δακτύλιος θα είναι και σαν $\mathbb{Z}[x]-$ πρότυπο)

Θεωρούμε φθίνουσα ακολουθία υποπροτύπων του M
$$\left(x^2+1,2\right)M \supseteq \left(x^2+1,2^2\right)M \supseteq \cdots \supseteq \left(x^2+1,2^n\right)M \supseteq \cdots$$
Υποθέτουμε ότι υπάρχει $n \geq 1$, ώστε $\left(x^2+1,2^n\right)M = \left(x^2+1,2^{n+1}\right)M$, δηλαδή υπάρχουν $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, ώστε
$$2^n = (x^2+1)f(x) + 2^{n+1}g(x) \Rightarrow 2^n(1-2g(x)) = (x^2+1)f(x)$$
[1] δηλαδή αφού $(x^2+1,2) = 1 \Rightarrow f(x) = 2^n\mu(x)$, άρα έχουμε ότι
$$1-2g(x) = \mu(x)(x^2+1) \xRightarrow{x=1} 1 = 2g(1) + 2\mu(1)$$
το οποίο είναι άτοπο. Έτσι συμπεραίνουμε ότι M δεν είναι του Artin σαν $\mathbb{Z}[x]$- πρότυπο συνεπώς δεν έχει συνθετική σειρα, όπου προκύπτει πως $\ell_{\mathbb{Z}[x]}M = \infty$.

[1] Εξισώνοντας τις κλάσεις θα έχουμε ότι $2^n = (x^2+1)d(x) + 2^{n+1}g(x) + h(x)(x^2+1)^2$, έτσι αν θέσουμε $f(x) = d(x) + h(x)(x^2+1)$ έχουμε την παραπάνω σχέση.

6.11. (i) Έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{gathered}\ell(M)<\infty \textit{ αν και μόνο αν } M \text{ είναι της Noether και του Artin σαν } R\text{- πρότυπο}\\ \textit{αν και μόνο αν } L \text{ και } N \text{ είναι της Noether και του Artin σαν } R\text{- πρότυπα}\\ \textit{αν και μόνο αν } \ell(L) \text{ και } \ell(N) \text{ είναι πεπερασμένα.}\end{gathered}$$

(ii) Γνωρίζουμε ότι $L \simeq \mathrm{Im}\varphi$ και $M/\mathrm{Im}\varphi \simeq N$, συνεπώς αν $\ell(L)=n$ και $\ell(N)=t$ υπάρχουν συνθετικές σειρές

$$(0)=\varphi(L_n)\subseteq\varphi(L_{n-1})\subseteq\cdots\subseteq\varphi(L_1)\subseteq\varphi(L_0)=\mathrm{Im}\varphi$$

και

$$(0)=\frac{M_t}{\mathrm{Im}\varphi}\subseteq\frac{M_{t-1}}{\mathrm{Im}\varphi}\subseteq\cdots\subseteq\frac{M_1}{\mathrm{Im}\varphi}\subseteq\frac{M_0}{\mathrm{Im}\varphi}=\frac{M}{\mathrm{Im}\varphi}.$$

Τώρα, αφού $\frac{M_i}{\mathrm{Im}\varphi}/\frac{M_{i+1}}{\mathrm{Im}\varphi}\simeq M_i/M_{i+1}$ έχουμε ότι τα πηλίκα M_i/M_{i+1} είναι απλά για κάθε $i=0,\cdots,t-1$, άρα ισχύει ότι

$$(0)=\varphi(L_n)\subseteq\cdots\subseteq\varphi(L_0)=\mathrm{Im}\varphi=M_t\subseteq\cdots\subseteq M_0=M$$

είναι συνθετική σειρά του M, άρα έχουμε ότι $\ell(M)=\ell(L)+\ell(N)$.

6.12. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο k.

- **Βάση.** Για $k=1,2$ το ζητούμενο έπεται άμεσα από την Άσκηση 6.11.
- **Επαγωγικό Βήμα.** Έστω $k\geq 3$. Αν

  $$0\to M_{k+1}\to M_k\to\cdots\to M_2\xrightarrow{\varphi} M_1\to M_0\to 0$$

  ακριβής ακολουθία R-προτύπων με $\ell(M_i)<\infty$ για κάθε i, έχουμε την εξής διάσπαση της παραπάνω ακριβούς ακολουθίας :

  $$0\to M_k\to M_{k-1}\to\cdots\to M_2\to\mathrm{Im}\varphi\to 0$$

  και

  $$0\to\mathrm{Im}\varphi\to M_1\to M_0\to 0.$$

  Από την επαγωγική υπόθεση και την Άσκηση 6.11 έχουμε ότι

  $$\sum_{i=2}^{k+1}(-1)^i\ell(M_i)-\ell(\mathrm{Im}\varphi)=0 \quad\text{και}\quad \ell(\mathrm{Im}\varphi)+\ell(M_0)=\ell(M_1) \tag{6.1}$$

  Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις έχουμε το ζητούμενο.

6.13. (i) Το ζητούμενο έπεται από την Άσκηση 6.11 μέσω της ακριβούς ακολουθίας

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0.$$

(ii) Το ζητούμενο έπεται από την Άσκηση 6.11 μέσω της ακριβούς ακολουθίας

$$0 \to M_1 \xrightarrow{i_1} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\pi_2} M_2 \to 0\ ,$$

όπου $i_1(a) = (a, 0)$ και $\pi_2(a, b) = b$.

(iii) Το ζητούμενο έπεται άμεσα από το (i).

6.14. Μέσω του ισομορφισμού $(M_1 + M_2)/M_1 \simeq M_2/M_1 \cap M_2$, από την Άσκηση 6.11 (i) (εξασφαλίζεται ότι όλα τα μήκη είναι πεπερασμένα) καθώς και από την Άσκηση 6.13 (ii) έχουμε ότι

$$\ell(M_1 + M_2/M_1) = \ell(M_2/M_1 \cap M_2) \Rightarrow \ell(M_1 + M_2) = \ell(M_1) + \ell(M_2) - \ell(M_1 \cap M_2).$$

Σημείωση. Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι γενίκευση του αντίστοιχου αποτελέσματος που υπάρχει στη Γραμμική Άλγεβρα, καθώς αν k σώμα και M ένα $k-$ πρότυπο, τότε έχουμε ότι $\ell_k(M) = \dim_k(M)$.

6.15. (i) Το ζητούμενο έπεται άμεσα, αφού $\mathfrak{m}M = 0$, δηλαδή ισχύει ότι M της Noether (και αντίστοιχα του Artin) σαν R-πρότυπο αν και μόνο αν M της Noether (και αντίστοιχα του Artin) σαν k-πρότυπο.

(ii) Αν υποθέσουμε ότι $\ell_R(M) < \infty$ έχουμε ότι M της Noether και του Artin σαν R- πρότυπα. Έτσι αφού M είναι της Noether είναι πεπερασμένα παραγόμενο και αν θεωρήσουμε την φθίνουσα ακολουθία προτύπων

$$\mathfrak{m}M \supseteq \mathfrak{m}^2 M \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{m}^n M \supseteq \cdots$$

αφού M είναι του Artin υπάρχει $n \geq 1$, ώστε $\mathfrak{m}^{n+1}M = \mathfrak{m}^n M$. Αφού $\mathfrak{m}^n$ πεπερασμένα παραγόμενο (αφού R της Noether) και M είναι πεπερασμένα παραγόμενο, από το Λήμμα του Nakayama, έχουμε ότι $\mathfrak{m}^n M = 0$.

Αντίστροφα, αφού R της Noether και M πεπερασμένα παραγόμενο έχουμε ότι M της Noether σαν R- πρότυπο. Από Παράρτημα 3 έχουμε ότι $R/\mathfrak{m}$ είναι του Artin και αφού M πεπερασμένα παραγόμενο έχουμε ότι M είναι του Artin σαν $R/\mathfrak{m}$- πρότυπο. Αφού $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{Ann}(R/\mathfrak{m})$ έχουμε ότι M είναι του Artin σαν R πρότυπο, συνεπώς έχουμε ότι $\ell_R(M) < \infty$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ ΤΟΥ ARTIN

7.1 Ασκήσεις

7.1. Ποιοι από τους παρακάτω δακτύλίους είναι του Artin ; Ποιες είναι οι διαστάσεις Krull αυτών ;

(i) $\mathbb{C}[x, y]/(x^2, y^3)$

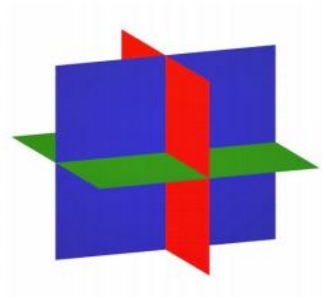
(ii) $\mathbb{Z}_{(2)}$ (τοπικοποίηση).

(iii) $R/\mathfrak{m}^{\mathfrak{t}}$, όπου $\mathfrak{m}$ μέγιστο ιδεώδες δακτυλίου R της Noether.

7.2. Δείξτε ότι κάθε γνήσιο ιδεώδες τοπικού δακτυλίου του Artin είναι πρωταρχικό.

7.3. Δείξτε ότι κάθε δακτύλιος του Artin που είναι περιοχή είναι σώμα.

7.4. Ποια είναι η διάσταση Krull του δακτυλίου $R = \mathbb{C}[x, y, z]/(xyz)$; Ασαφές ερώτημα: Ποια θα ορίζατε ως τη διάσταση του παρακάτω αλγεβρικού συνόλου, που είναι η ένωση των τριών επιπέδων των αξόνων ;



Ποιος ο δακτύλιος συντεταγμένων του ;

7.5. Έστω M πεπερασμένα παραγόμενο R -πρότυπο, όπου R δακτύλιος της Noether. Δείξτε ότι τα ακόλουθα ειναι ισοδύναμα.

(i) Το μήκος του M είναι πεπερασμένο.

(ii) Υπάρχουν μέγιστα ιδεώδη $\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_t$ του R με $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_t M = 0$

1. Κάθε πρώτο ιδεώδες του R που περιέχει το $\mathrm{Ann}M$ είναι μέγιστο.
2. Ο δακτύλιος $R/\mathrm{Ann}M$ είναι του Artin.

7.6. Έστω R δακτύλιος του Artin. Δείξτε ότι ως R-πρότυπο, το R έχει πεπερασμένο μήκος. Στη συνέχεια δείξτε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο έχει πεπερασμένο μήκος.

7.7. Έστω R δακτύλιος της Noether και I γνήσιο ιδεώδες του R. Δείξτε ότι το R- πρότυπο R/I έχει πεπερασμένο μήκος αν και μόνο αν το σύνολο $\mathrm{Ass}I$ αποτελείται από μέγιστα ιδεώδη.

7.2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

7.1. (i) Αν $R = \mathbb{C}[x,y]/(x^2,y^3)$ θεωρούμε $\tilde{\mathfrak{m}} = (x,y)R$ και έχουμε ότι

$$R/\tilde{\mathfrak{m}} \simeq \mathbb{C}[x,y]/(x,y) \simeq \mathbb{C}\ ,$$

συνεπώς έχουμε ότι $\tilde{\mathfrak{m}}$ είναι μέγιστο ιδεώδες του R και μάλιστα $(\tilde{\mathfrak{m}})^5 = 0$, αφού $(\tilde{\mathfrak{m}})^5$ είναι το ιδεώδες του R που παράγεται από τις κλάσεις $x^iy^j + \left(x^2,y^3\right)$ με $i+j=5$. Αφού $\mathbb{C}[x,y]$ είναι της Noether, τότε R είναι της Noether από τα προηγούμενα έχουμε ότι R είναι του Artin, δηλαδή $\dim(R) = 0$.

(ii) Γνωρίζουμε ότι τα πρώτα ιδεώδη του $\mathbb{Z}_{(2)}$ είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τα πρώτα ιδεώδη του $\mathbb{Z}$ που περιέχουν του (2). Έτσι έχουμε ότι $\mathfrak{p}_0 = (0)$ και $\mathfrak{p}_1 = 2\mathbb{Z}_{(2)}$ είναι τα μοναδικά πρώτα ιδεώδη του $\mathbb{Z}_{(2)}$. Αφού ισχύει ότι $\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1$, δηλαδή $\mathfrak{p}_0$ δεν είναι μέγιστο, άρα $\mathbb{Z}_{(2)}$ δεν είναι του Artin και $\dim \mathbb{Z}_{(2)} = 1$.

(iii) Στο Παράρτημα 3. δείξαμε ότι R/m^t είναι του Artin, άρα έχουμε ότι $\dim\left(R/\mathfrak{m}^t\right) = 0$.

7.2. Έστω R τοπικός δακτύλιος του Artin. Έστω $I \trianglelefteq R$, και αφού R του Artin ισχύει ότι είναι και της Noether, δηλαδή το I επιδέχεται πρωταρχική ανάλυση της μορφής $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$. Έτσι, έχουμε ότι

$$\sqrt{I} = \sqrt{Q_1 \cap \cdots \cap Q_n} = \sqrt{Q_1} \cap \cdots \cap \sqrt{Q_n} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n.$$

Αφού R είναι του Artin και $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ πρώτα έχουμε ότι είναι και μέγιστα και μάλιστα αφού R τοπικός ισχύει ότι $\mathfrak{p}_1 = \cdots = \mathfrak{p}_n = \mathfrak{m}$, όπου $\mathfrak{m}$ το μέγιστο ιδεώδες του R. Αφού $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ είναι μέγιστο ιδεώδες του R από την Άσκηση 3.8. έχουμε ότι I είναι πρωταρχικό.

7.3. Αν R περιοχή και του Artin έχουμε ότι (0) είναι πρώτο ιδεώδες του R, άρα και μέγιστο ιδεώδες του R. Έτσι έχουμε ότι $R \simeq R/(0)$ σώμα, δηλαδή R είναι σώμα.

7.4.

7.5.

7.6. Αφού R είναι δακτύλιος του Artin έχουμε ότι είναι δακτύλιος της Noether. Άρα, R σαν $R-$ πρότυπο είναι της Noether και του Artin, άρα έχει συνθετική σειρά, δηλαδή πεπερασμένο μήκος.

Αν M πεπερασμένα παραγόμενο $R-$ πρότυπο με R δακτύλιο της Noether και του Artin, τότε έχουμε ότι M είναι της Noether και του Artin σαν $R-$ πρότυπο. Έτσι, έχουμε ότι M έχει συνθετική σειρά, δηλαδή M έχει πεπερασμένο μήκος.

7.7. Υποθέτουμε ότι R/I έχει πεπερασμένο μήκος σαν $R-$ πρότυπο, δηλαδή είναι της Noether και του Artin σαν $R-$ πρότυπο. Αφού $I \subseteq \operatorname{Ann}(R/I)$, τότε έχουμε ότι R/I είναι είναι της Noether και του Artin σαν R/I πρότυπο, δηλαδή είναι δακτύλιος της Noether και του Artin. Αν $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(I) \Rightarrow \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ με $I \subseteq \mathfrak{p}$. Έτσι έχουμε ότι $\mathfrak{p}/I \in \operatorname{Spec}(R/I) \Rightarrow \mathfrak{p}/I \in \operatorname{maxSpec}(R/I)$, αφού R/I είναι του Artin. Έτσι έχουμε ότι $\mathfrak{p} \in \operatorname{maxSpec}(R)$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το σύνολο $\operatorname{Ass}I$ αποτελείται από μέγιστα ιδεώδη. Αφού R της Noether έχουμε ότι R/I είναι της Noether, έτσι ομοίως με παραπάνω έχουμε ότι R/I της Noether σαν $R-$ πρότυπο.

Από το Θεώρημα Αντιστοιχίας Ιδεωδών, θεωρούμε $\mathfrak{p}/I \in \operatorname{Spec}(R/I) \Rightarrow \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ και $I \subseteq \mathfrak{p}$. Αφού R της Noether έχουμε ότι I επιδέχεται πρωταρχική ανάλυση, δηλαδή από την αρχική υπόθεση υπάρχουν $\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_n \in \operatorname{maxSpec}(R)$, ώστε

$$\sqrt{I} = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n \subset \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}.$$

Αφού $\mathfrak{p}$ πρώτο, από το Λήμμα Αποφυγής, έχουμε ότι υπάρχει $i \in \{1, \cdots, n\}$ ώστε $\mathfrak{m}_i \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{m}_i$. Έτσι έχουμε ότι $\mathfrak{p}/I$ είναι μέγιστο ιδεώδες του R/I. Αφού R/I της Noether και κάθε πρώτο ιδεώδες είναι μέγιστο έχουμε ότι R/I είναι δακτύλιος του Artin, άρα R/I είναι R/I πρότυπο του Artin. Ομοίως με παραπάνω συμπεραίνουμε ότι R/I είναι $R-$ πρότυπο του Artin και αφού είναι και της Noether ισχύει ότι R/I έχει συνθετική σειρά σαν $R-$ πρότυπο, δηλαδή έχει πεπερασμένο μήκος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΑΚΕΡΑΙΑ ΕΞΑΡΤΗΣΗ

8.1 Ασκήσεις

8.1. Δείξτε ότι κάθε περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης είναι ακέραια κλειστή στο σώμα πηλίκων της.

8.2. Έστω n θετικός ακέραιος που δεν διαιρείται με το τετράγωνο ακεραίου μεγαλύτερου του 1. Θεωρούμε το σώμα $k = \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$. Δείξτε ότι το $a + b\sqrt{n}$, όπου $a, b \in \mathbb{Q}$, είναι ακέραιο πάνω από το k αν και μόνο αν (1) $a, b \in \mathbb{Z}$ ή (2) $n \equiv 1 \mod 4$ και $a - 1/2, b - 1/2 \in \mathbb{Z}$.

8.3. Θεωρούμε τη δράση της ομάδας $G = \{1, g\}$ στο δακτύλιο $R = \mathbb{C}[x, y]$ που δίνεται από $1 * f(x, y) = f(x, y)$ και $g * f(x, y) = f(-x, -y)$. Δείξτε ότι $R^G = \mathbb{C}[x^2, xy, y^2]$.

8.4. Ποιες από τις ακόλουθες επεκτάσεις δακτυλίων του $\mathbb{Z}$ είναι ακέραιες ;

(i) $\mathbb{Z}[\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[5]{5}]$.

(ii) $\mathbb{Z}[1/\sqrt{2}]$.

(iii) $\mathbb{Z}[x]/(x^3)$.

8.5. Αν $R \subseteq S$ είναι δακτύλιοι με S ακέραιο πάνω από το R, τότε ο $S[x]$ είναι ακέραιος πάνω από τον $R[x]$.

8.6. Έστω k σώμα, $R = k[x^2]$ και $S = k[x]$.

(i) Αληθεύει ότι το S είναι ακέραιο πάνω από το R ;

(ii) Αληθεύει ότι το S είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο; Ελεύθερο R-πρότυπο ;

(iii) Δείξτε ότι κάθε $f \in S$ είναι ρίζα πολυωνύμου βαθμού 2 με συντελεστές στο R.

8.7. Αν $R \subseteq S$ είναι δακτύλιοι έτσι ώστε το σύνολο $S \setminus R$ είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό, τότε ο R είναι ακέραια κλειστός στο S.

8.2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

8.1. Έστω R περιοχή μοναδική παραγοντοποίησης και $\frac{m}{n} \in \mathrm{Frac}\,(R)$ ακέραιο πάνω από το R με $(m,n)=1$. Έτσι υπάρχει $f(x) \in R[x]$ ώστε

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^k + f_{k-1}\left(\frac{m}{n}\right)^{k-1} + \cdots + f_0 = 0 \Rightarrow m^k + f_n m^{k-1} n + \cdots + f_0 n^k = 0.$$

Αν $n \notin U(R)$, τότε υπάρχει $p \in R$ ανάγωγο, ώστε $p|n$. Αφού R είναι περιοχή μοναδική παραγοντοποίησης από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι $p|m$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

8.2.

8.3. Αρχικά είναι άμεσο ότι $\mathbb{C}[x^2, xy, y^2] \subseteq R^G$. Θεωρούμε $f \in R^G$ με

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^{j_i} y^{k_i}\ ,$$

για κάποια $j_i, k_i \in \mathbb{N}$ και $f_i \in \mathbb{C}$, όπου έχουμε ότι πρέπει $j_i + k_i \in 2\mathbb{Z}$, για κάθε $i = 1, \cdots, n$. Διακρίνοντας περιπτώσεις για τα j_i, k_i έχουμε το ζητούμενο.

8.4. Υπενθυμίζουμε ότι αν $R \subseteq R[s] \subseteq S$ με $s \in S$ ακέραιο πάνω από το R, τότε $R[s]$ είναι ακέραια επέκταση πάνω από το R. Αν $s' \in R[s]$, τότε έχουμε ότι $R \subseteq R[s'] \subseteq R[s]$, όπου $R[s]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο, άρα s' είναι ακέραιο πάνω από το R.

(i) Θα δείξουμε ότι S είναι ακέραια πάνω από το $\mathbb{Z}$, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}$ είναι ακέραιο πάνω από $\mathbb{Z}$. Όμως $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[5]{5}$ είναι ρίζες των $x^2-2,\ x^3-3$ και x^5-5 αντίστοιχα, συνεπώς είναι ακέραια πάνω από το $\mathbb{Z}$. Αφού η ακέραια θήκη του $\mathbb{Z}$ στο S είναι υποδακτύλιος του S έχουμε ότι $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}$ είναι ακέραιο πάνω από το $\mathbb{Z}$.

(ii) Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ μονικό, ώστε $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$. Έτσι έχουμε ότι

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + f_{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} + \cdots + f_0 = 0 \Rightarrow 1 + f_{n-1}\sqrt{2} + \cdots + f_0\left(\sqrt{2}\right)^n = 0.$$

Από την παραπάνω σχέση, συλλέγοντας τις άρτιες και περιττές δυνάμεις του $\sqrt{2}$ αντίστοιχα, ισχύει ότι $(1+a)+b\sqrt{2}=0$ με $a \in 2\mathbb{Z}$ και $b \in \mathbb{Z}$. Από το Παράρτημα 4 έχουμε ότι $1+a=0$, το οποίο είναι άτοπο αφού $2 \not| 1$.

(iii) Είναι σαφές ότι $Z[x]/\left(x^3\right) = \mathbb{Z}\left[x+\left(x^3\right)\right]$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι $x+\left(x^3\right)$ είναι ακέραιο πάνω από το $\mathbb{Z}$ το οποίο ισχύει αφού είναι ρίζα του $t^3 \in \mathbb{Z}[t]$.

8.5. Έστω $f(x) = s_n x^n + \cdots + s_0 \in S[x]$. Αρκεί να δείξουμε ότι $s_i x^i$ είναι ακέραια πάνω από το $R[x]$.

Αν υπάρχει $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$ με $s_i \in S \setminus R$, τότε έχουμε ότι $s_i \in S$ ακέραιο πάνω από το R συνεπώς υπάρχει $g(t) \in R[t]$ ώστε $g(s_i) = s_i^m + g_{m-1} s_i^{m-1} + \cdots + g_0 = 0$ με $m \geq 1$. Ορίζουμε $h(t) \in R[x][t]$ με

$$h(t) = t^m + g_{m-1} x^i t^{m-1} + g_{m-2} x^{2i} t^{m-2} + \cdots + x^{mi} g_0.$$

όπου έχουμε ότι $h\left(s_i x^i\right) = x^{mi} g(s_i) = 0$. Αν $s_j \in R$ είναι σαφές ότι $s_j x^j$ είναι ακέραιο πάνω από το $R[x]$, άρα έχουμε ότι $s_i x^i$ είναι ακέραια πάνω από το $R[x]$ και αφού η ακέραια θήκη του $R[x]$ στο $S[x]$ είναι υποδακτύλιος του $S[x]$ έχουμε ότι $f(x)$ είναι ακέραιο πάνω από το $R[x]$ και έχουμε το ζητούμενο.

8.6. (i) Αφού x είναι ρίζα του πολυωνύμου $t^2 - x^2 \in k[x^2][t]$, έχουμε ότι x είναι ακέραιο, άρα S είναι ακέραια πάνω από το R.

(ii) Αν $f(x) \in S$, τότε έχουμε ότι $f(x) = g(x) \cdot 1 + x \cdot h(x)$ με $g, h \in k[x^2]$. Άρα, ισχύει ότι S είναι πεπερασμένα παραγόμενο R πρότυπο, που παράγεται από τα στοιχεία $1, x$. Είναι σαφές ότι $1, x$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, συνεπώς S είναι ελεύθερο R- πρότυπο με $\operatorname{rank}_R(S) = 2$.

(iii) Θεωρούμε $f \in S$. Τότε, υπάρχουν $g, h \in R$, ώστε $f = g + xh$. Θεωρούμε πολυώνυμο στο $R[t]$ που ορίζεται ως εξής :

$$P(t) = t^2 - 2gt + g^2 - x^2 h^2.$$

όπου είναι σαφές ότι $P(f) = 0$.

8.7. Έστω $s \in S$ ακέραιο πάνω από το R, δηλαδή ισχύει ότι

$$s^n + r_{n-1} s^{n-1} + \cdots + r_1 s + r_0 = 0, \quad s_i \in R,\ i = 1, \cdots, n.$$

Άρα, είναι σαφές ότι $s\left(s^{n-1} + r_{n-1} s^{n-2} + \cdots + r_1\right) \in R$. Αν υποθέσουμε ότι $s \in S \setminus R$, αφού $S \setminus R$ είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό, προκύπτει ότι

$$s^{n-1} + r_{n-1} s^{n-2} + \cdots + r_1 \in R\ ,$$

δηλαδή έχουμε ότι

$$s\left(s^{n-2} + r_{n-1} s^{n-3} + \cdots + r_2\right) \in R \Rightarrow s^{n-2} + r_{n-1} s^{n-3} + \cdots + r_2 \in R.$$

Συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο προκύπτει ότι $a + r_1 \in R \Rightarrow a \in R$, το οποίο είναι άτοπο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

NULLSTELLENSATZ

9.1 Ασκήσεις

Στα παρακάτω k είναι αλγεβρικά κλειστό σώμα.

9.1. Ποια είναι τα ακόλουθα αλγεβρικά σύνολα στο k^3 (δηλ. ποιες οι ανάγωγες συνιστώσες τους) ;

(i) $V(xy + yz + zx, xyz)$.

(ii) $(x - y^2, x^2 - z^2)$.

9.2. Έστω $f, g \in k[x_1, \cdots, x_n]$ με f ανάγωγο. Δείξτε ότι αν το f δεν διαιρεί το g, τότε το $V(f)$ δεν περιέχεται στο $V(g)$.

9.3. Έστω $f \in k[x_1, \cdots, x_n]$ που δεν διαιρείται με το τετράγωνο αναγώγου πολυωνύμου. Αληθεύει ότι $I\left(V(f)\right) = (f)$;

9.4. Παραστήσετε το $V(J)$ ως ένωση πεπερασμένου πλήθους αναγώγων αλγεβρικών συνόλων στο $\mathbb{C}^2$, όπου $J = (f, g)$ και $f = x^2 - y^2, g = x^3 + xy^2 - y^3 - x^2y - x + y$. Στη συνέχεια παραστήστε το $\sqrt{J}$ ως τομή πεπερασμένου πλήθους πρώτων ιδεωδών του $\mathbb{C}[x, y]$.

9.5. Υποθέτοντας το ισχυρό Nullstellensatz, δείξτε το ασθενές Nullstellensatz.

9.2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

9.1. (i) Έχουμε ότι $V(xy+yz+zx, xyz) = V(x) \cup V(y) \cup V(z)$, όπου τα αλγεβρικά σύνολα $V(x), V(y), V(z)$ είναι ανάγωγα. Για παράδειγμα, από ισχυρό Nullstellsantz έχουμε ότι $I(V(x)) = \sqrt{(x)} = (x)$, όπου (x) πρώτο ιδεώδες. Άρα, το $V(x)$ είναι ανάγωγο. Ομοίως έχουμε ότι $V(y)$ και $V(z)$ είναι ανάγωγα.

ii)

9.2. Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι $V(f) \subseteq V(g)$, δηλαδή έχουμε ότι

$$I\left(V(g)\right) \subseteq I\left(V(f)\right) \Leftrightarrow \sqrt{(g)} \subseteq \sqrt{(f)} = (f) \ ,$$

αφού f είναι ανάγωγο και $k[x_1, \cdots, x_n]$ είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης, άρα (f) είναι πρώτο. Έτσι έχουμε ότι $g \in \sqrt{(g)} \subseteq (f)$, άρα ισχύει ότι $f|g$ το οποίο είναι άτοπο.

9.3. Αφού $k[x_1, \cdots, x_n]$ είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίσης, έχουμε ότι $f = f_1 \cdots f_n$, όπου $f_1, \cdots, f_n \in k[x_1, \cdots, x_n]$ ανάγωγα και διακεκριμένα, αφού f δεν διαιρείται με το τετράγωνο αναγώγου πολυωνύμου.

Ισχυρισμός 3. Ισχύει ότι

$$(f) = (f_1) \cap \cdots \cap (f_n).$$

Απόδειξη. Ισχύει ότι $(f) \subseteq (f_i)$, για κάθε $i = 1, \cdots, n$ έχουμε ότι $(f) \subseteq \bigcap_{i=1}^n (f_i)$.

Αντίστροφα, αν $g \in \bigcap_{i=1}^n (f_i)$, αφού $f_1, \cdots, f_n$ είναι διακεκριμένα ανάγωγα πολυώνυμα στον $k[x_1, \cdots, x_n]$ έχουμε ότι $g = hf_1 \cdots f_n = hf \in (f)$, συνεπώς έχουμε ότι $\bigcap_{i=1}^n (f_i) \subseteq (f)$. □

Αφού $k[x_1, \cdots, x_n]$ περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης, έχουμε ότι αν $g \in k[x_1, \cdots, x_n]$ ανάγωγό, τότε (g) είναι πρώτο ιδεώδες του $k[x_1, \cdots, x_n]$. Έτσι έχουμε ότι από το ισχυρό Nullstellensatz έχουμε ότι

$$I(V(f)) = \sqrt{(f)} = \sqrt{\bigcap_{i=1}^n (f_i)} = \bigcap_{i=1}^n \sqrt{(f_i)} = \bigcap_{i=1}^n (f_i) = (f).$$

9.4. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & V(f,g) = V\left[(x-y)(x+y), (x-y)\left(x^2+y^2-1\right)\right] \\ = \quad & V(x-y) \cup V(x+y, x^2+y^2-1) \\ = \quad & V(x-y) \cup V\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}, y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup V\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}, y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανάλυση είναι ανάλυση σε ανάγωγα αλγεβρικά σύνολα. Από το ισχυρό Nullstellensatz ισχύει ότι

$$\sqrt{J} = I(V(f,g)) = (x-y) \cap \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}, y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cap \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}, y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

και έχουμε το ζητούμενο.

9.5. Έστω I ένα γνήσιο ιδεώδες του $k[X_1, \ldots, X_n]$. Αφού $I \neq k[X_1, \ldots, X_n]$, τότε $\sqrt{I} \neq k[X_1, \ldots, X_n]$, αλλιώς θα υπήρχε $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ ώστε $1 = 1^k \in I$. Έστω, προς άτοπο, ότι $V(I) = \emptyset$. Τότε, προκύπτει ότι

$$V(I) = \emptyset \Rightarrow I(V(I)) = I(\emptyset) = k[X_1, \ldots, X_n].$$

Από το ισχυρό Nullstellensatz έχουμε ότι $\sqrt{I} = I(V(I)) = k[X_1, \ldots, X_n]$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στο κεφάλαιο αυτό υπάρχουν αποδείξεις ισχυρισμών, όπου για λόγους πρακτικότητα δεν προστέθηκαν απευθείας στις ασκήσεις.

Παράρτημα 1. Αν R είναι περιοχή, τότε ο δακτύλιος $R[x]$ είναι περιοχή.

Απόδειξη. Έστω R περιοχή και $R[x]$ ο αντίστοιχος πολυωνυμικός δακτύλιος, ο οποίος είναι μεταθετικός με μονάδα. Θεωρούμε πολυώνυμα $f(x), g(x) \in R[x]$ με $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ και $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ με $a_n, b_m \neq 0$, ώστε

$$f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i = 0.$$

Υποθέτουμε ότι f και g δεν είναι μηδέν, με $a_n, b_m \neq 0$. Γνωρίζουμε ότι

$$c_{n+m} = \sum_{i+j=n+m} a_i b_j = a_n b_m = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο αφού ο R είναι περιοχή.Έτσι συμπεραίνουμε ότι f ή g ισούται με το 0, δηλαδή ο δακτύλιος $R[x]$ είναι περιοχή. $\square$

Παράρτημα 2. Έστω k σώμα και I, J ιδεώδη του $k[X]$, όπου $X = (x_1, \cdots, x_n)$ με $I \subseteq J$. Τότε, ισχύει ότι $V(J) \subseteq V(I)$.

Απόδειξη. Έστω $P \in V(J)$, δηλαδή $f(P) = 0$, για κάθε $f(x) \in J$. Έτσι, είναι σαφές ότι $f(P) = 0$, για κάθε $f(x) \in I$, δηλαδή $P \in V(I)$ και έχουμε το ζητούμενο. □

Παράρτημα 3. Αν R δακτύλιος της Noether και $\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}(R)$, τότε $R/\mathfrak{m}^t$ είναι του Artin, για κάθε $t \geq 1$.

Απόδειξη. Έστω $t \geq 1$. Έχουμε ότι $R/\mathfrak{m}^t$ είναι της Noether και $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^t$ μέγιστο ιδεώδες του $R/\mathfrak{m}^t$. Αφού ισχύει ότι $(\tilde{\mathfrak{m}})^t = 0$ έχουμε ότι $R/\mathfrak{m}^t$ είναι του Artin. □

Παράρτημα 4. Κάθε στοιχείο του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ γράφεται με μονοσήμαντο τρόπο.

Απόδειξη. Έστω $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, ώστε $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Rightarrow a - c = \sqrt{2}(d - b)$. Αν $d \neq b \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a-c}{d-b} \in \mathbb{Q}$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, συμπεραίνουμε ότι $a = c$ και $b = d$. □